

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ISSN: 2225-4293

2019. Т.8. №3 (33)

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ. 2019. Т.8. №3 (33)



Научно-технологический центр уникального
приборостроения Российской академии наук

Учредители: Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской академии наук, Кравченко Виктор Филиппович, Пустовойт Владислав Иванович

Издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-технологический центр уникального приборостроения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован 15 февраля 2000 г. Министерством Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовой информации

Свидетельство о регистрации ПИ № 77–1685

Физические Основы Приборостроения

2019. Т.8. №3 (33)

doi: 10.25210/jfop-1903

ISSN 2225–4293

Журнал «Физические основы приборостроения» включен:

- В **Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)**.
- В список журналов базы данных **Russian Science Citation Index (RSCI)** на платформе **Web of Science**.

- В **Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук**.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Пустовойт В.И., гл. редактор, академик РАН, д.ф.-м.н., проф.
Кравченко В.Ф., зам. гл. редактора, д.ф.-м.н., проф.
Боголюбов А.Н., д.ф.-м.н., проф.
Боритко С.В., д.ф.-м.н., проф.
Быков А.А., д.ф.-м.н.
Булатов М.Ф., д.ф.-м.н., проф.
Виноградов Е.А., член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф.
Гуляев Ю.В., академик РАН, д.ф.-м.н., проф.
Дианов Е.М., академик РАН, д.ф.-м.н., проф.
Дмитриев А.С., д.ф.-м.н., проф.
Компанец О.Н., д.ф.-м.н., проф.
Крохин О.Н., академик РАН, д.ф.-м.н., проф.
Крюковский А.С., д.ф.-м.н., проф.
Кутуза Б.Г., д.ф.-м.н., проф.
Лукин Д.С., д.ф.-м.н., проф.
Мазур М.М., д.т.н.
Морозов А.Н., д.ф.-м.н., проф.
Назаров Л.Е., д.ф.-м.н.
Панич А.Е., д.т.н., проф.
Панич А.А., д.т.н., проф.
Пожар В.Э., д.ф.-м.н.
Садовничий В.А., академик РАН, д.ф.-м.н., проф.
Самохин А.Б., д.ф.-м.н., проф.
Сидняев Н.И., д.т.н., проф.
Синявский Г.П., д.ф.-м.н., проф.
Татаренко Н.И., д.ф.-м.н.
Федоров И.Б., академик РАН, д.т.н., проф.

ЗАРУБЕЖНЫЕ ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Буц В.А., д.ф.-м.н., проф. (Украина)
Волосюк В.К., д.т.н., проф. (Украина)
Загородний А.Г., академик НАН Украины, иностранный член РАН, д.ф.-м.н., профессор (Украина)
Кобаяши К., проф. (Япония)
Кураев А.А., д.ф.-м.н., проф. (Беларусь)
Луценко В.И., д.ф.-м.н., (Украина)
Мартirosян Р.М., академик НАН Республики Армения, иностранный член РАН, д.ф.-м.н., проф. (Республика Армения)
Мележик П.Н., академик НАН Украины, д.ф.-м.н., проф. (Украина)
Миттра Р., проф. (США)
Павликов В.В., д.т.н., (Украина)
Перес-Меана Э., проф. (Мексика)
Пономарев В.И., д.т.н., проф. (Мексика)
Ра Д., проф. (Корея)
Фисун А.И., д.ф.-м.н., проф. (Украина)
Хашимото М., проф. (Япония)
Яковенко В.М., академик НАН Украины, д.ф.-м.н., проф. (Украина)

EDITORIAL BOARD

Pustovoit, V.I., Editor-in-Chief, Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Kravchenko, V.F., Deputy Editor-in-Chief, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Bogolyubov, A.N., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Boritko, S.V., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Bykov, A.A., Dr. Sci. (Phys.– Math.)
Bulatov, M.F., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Vinogradov, E.A., Corresponding Member of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Gulyaev, Yu.V., Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Dianov, E.M., Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Dmitriev, A.S., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Kompanets, O.N., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Krohin, O.N., Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Krukovsky, A.S., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Kutuza, B.U., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Lukin, D.S., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Mazur, M. M., Dr. Sci. (Techn.)
Morozov, A. N., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Nazarov, L.E., Dr. Sci. (Phys.– Math.)
Panich, A.E., Dr. Sci. (Techn.), Prof.
Panich, A.A., Dr. Sci. (Techn.), Prof.
Pozhar, V.E., Dr. Sci. (Phys.– Math.)
Sadovnichiy, V.A., Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Samokhin, A.B., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Sidnyayev, N.I., Dr. Sci. (Techn.), Prof.
Synyavskiy, G.P., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof.
Tatarenko, N.I., Dr. Sci. (Phys.– Math.)
Fedorov, I.B., Academician of RAS, Dr. Sci. (Techn.), Prof.

FOREIGN EDITORIAL BOARD MEMBERS

Buts, V.A., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Ukraine)
Volosyuk, V. K., Dr. Sci. (Techn.), Prof. (Ukraine)
Zagorodny, A.G., Academician NAS of Ukraine, Foreign Member of the RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Ukraine)
Kobayashi, K., Prof. (Japan)
Kuraev, A.A., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Belarus)
Lutsenko, V.I., Dr. Sci. (Phys.– Math.) (Ukraine)
Martirosyan, R.M., Academician of NAS of Republic of Armenia, Foreign Member of the RAS, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Republic of Armenia)
Melezhik, P.N., Academician of NAS of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Ukraine)
Mittra, R., Prof. (USA)
Pavlikov, V.V., Dr. Sci. (Techn.) (Ukraine)
Perez-Meana, H., Prof. (Mexico)
Ponomaryov, V.I., Dr. Sci. (Techn.), Prof. (Mexico)
Ra, J-W., Prof. (Korea)
Fisun, A. I., Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Ukraine)
Hashimoto, M., Prof. (Japan)
Yakovenko, V.M., Academician NAS of Ukraine, Dr. Sci. (Phys.– Math.), Prof. (Ukraine)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

К 95-ЛЕТИЮ
АЛЕКСЕЯ ГЕОРГИЕВИЧА СВЕШНИКОВА

2

К 80-ЛЕТИЮ
ВАЛЕНТИНА ФЕДОРОВИЧА БУТУЗОВА

5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Боголюбов А.Н., Боголюбов Н.А.,
Домбровская Ж.О., Мухартова Ю.В.
Математическое моделирование электродинамических
систем на основе метаматериалов

7

Боголюбов А.Н., Боголюбов Н.А.,
Коняев Д.А., Хлебников Ф.Б., Шапкина Н.Е.
Оптимизация формы зеркального коллиматора
со скруглёнными краями

19

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Юрин А.В.
Кратномасштабная аппроксимация решения интегрального
уравнения типа свертки на основе новых
частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко

28

Буц В.А., Ковальчук И.К., Толстолужский А.П.
Динамика каскадов при трехволновом взаимодействии волн

84

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА

Вагин В.А., Хорохорин А.И.
Эквидистантность точек регистрации
интерферограммы в фурье-спектрометре

97

Рубрики журнала

103

Правила оформления рукописей

104

Поздравление Андрея Николаевича Морозова
с избранием членом-корреспондентом
Российской академии наук

105

OUR HERO OF THE DAY

TO THE 95TH ANNIVERSARY
OF ALEXEY GEORGIEVICH SVESHNIKOV

TO THE 80TH ANNIVERSARY
VALENTIN FEDOROVICH BUTUZOV

MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES

Bogolyubov, A.N., Bogolyubov, N.A.,
Dombrovskaya, Zh.O., and Mukhartova, Yu.V.
Mathematical Modeling of Electrodynamic
Systems Based on Metamaterials

Bogolyubov, A.N., Bogolyubov, N.A.,
Konyaeva, D.A., Khlebnikov, F.B., and Shapkina, N.E.
Optimizing the Shape of a Mirror Collimator
with Rounded Edges

NEW MATHEMATICAL AND PHYSICAL METHODS

Kravchenko, V.F., Pustovoit, V.I., and Yurin, A.V.
Multiresolution Approximation of the Solution
of the Deconvolution Integral Equation on Basis
of New Frequency-Modified Kravchenko Wavelets

Buts, V.A., Kovalchuk, I.K., and Tolstoluzhsky, A.P.
Features of Weakly Nonlinear Interaction of Wave

SPECTRAL METHODS AND DEVICES

Vaguine, V.A., Khorokhorin, A.I.
The Equidistance of the Registration Points
of the Interferogram in a Fourier Spectrometer

Journal Headings

Rules for the Preparation of Manuscripts

Congratulations to Andrey Nikolaevich Morozov
on His Election as a Corresponding Member
of the Russian Academy of Sciences

doi: 10.25210/jfop-1903

К 95-ЛЕТИЮ АЛЕКСЕЯ ГЕОРГИЕВИЧА СВЕШНИКОВА



19 ноября 2019 года исполняется 95 лет известному ученому, заслуженному деятелю науки РСФСР, лауреату Государственной премии СССР, лауреату Ломоносовской премии МГУ за педагогическую деятельность, академику Российской Академии Естественных Наук, доктору физико-математических наук, заслуженному профессору Московского университета Алексею Георгиевичу Свешникову.

Алексей Георгиевич Свешников родился 19 ноября 1924 года в городе Саратове в семье профессора Саратовского университета Георгия Николаевича Свешникова.

Участник Великой Отечественной войны, А. Г. Свешников с честью выполнил свой долг перед Родиной. В суровое военное время в апреле 1945 года он был тяжело ранен на 4-м Украинском фронте. За отвагу и доблесть Алексей Георгиевич был награжден орденами «Красная звезда» и «Отечественная война 1-й степени», медалью «За победу над Германией», а позднее многими юбилейными медалями.

В 1945 году после демобилизации Алексей Георгиевич поступил на физический факультет МГУ, который окончил в 1950 году и был принят в аспирантуру кафедры математики физического факультета. Он прямой ученик выдающегося математика академика Андрея Николаевича Тихонова, который оказал определяющее влияние на научную и педагогическую деятельность Алексея Георгиевича.

Профессор А. Г. Свешников — крупнейший специалист в области математической физики, прикладной и вычислительной электродинамики. Он создал большую, активно работающую научную школу. Под его руководством защищено 45 кандидатских диссертаций. Среди его учеников 15 докторов физико-математических наук.

Большой цикл работ А. Г. Свешникова посвящен математическим проблемам электродинамики, в частности, математическим задачам электродинамики волноведущих и излучающих систем. Его кандидатская диссертация «Принципы излучения и единственность решения задач дифракции», защищенная в 1953 году, была посвящена исследованию корректности математической постановки краевых задач теории установившихся колебаний. Глубокое и всестороннее исследование А. Г. Свешниковым общего принципа предельного поглощения позволило доказать теоремы единственности для внешних задач теории установившихся колебаний в электродинамике, акустике, теории упругости. Алексеем Георгиевичем были введены «парциальные» условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями, что оказалось наиболее эффективным для построения численных алгоритмов решения данного класса задач. В своей докторской диссертации «Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах», защищенной в 1963 году, Алексей Георгиевич развил эффективные алгоритмы исследования волноведущих систем, основанные на разработанных им проекционных методах решения широкого круга задач математической физики, возникающих при математическом моделировании радиоволноводов и в теории дифракции в неоднородных средах. А. Г. Свешниковым был предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами. Исследование этого принципа позволило дать обоснование неполного метода Галеркина для достаточно общего класса задач и получить мажорантные оценки скорости его сходимости. В дальнейшем Алексей Георгиевич принимал активное участие в создании принципиально новых методов математического проектирования излучающих систем различного назначения. За эти исследования Алексей Георгиевич в числе ряда сотрудников МГУ, возглавляемых академиком А. Н. Тихоновым, был удостоен Государственной премии СССР.

Профессором А. Г. Свешниковым создана мощная школа по решению математических проблем электродинамики. Среди его учеников профессора А. С. Ильинский, В. П. Моденов, А. Н. Боголюбов, А. А. Быков и ряд других известных ученых.

Характерной чертой Алексея Георгиевича является широта и многосторонность его научных интересов, глубокое проникновение в сущность изучаемых проблем, которое приводит к достижению фундаментальных результатов мирового уровня. Большой цикл его работ посвящен проблеме создания и алгоритмической реализации математических моделей физики плазмы и динамики сплошных сред, обратным задачам синтеза и распознавания многослойных оптических покрытий, идентификации дефектов слоистых структур.

С начала 60-х годов А. Г. Свешников уделяет большое внимание разработке методов исследования математических моделей динамики заряженных частиц, связанных в первую очередь с конструированием ионнооптических систем инжекторов интенсивных пучков и различных плазмооптических устройств. Начиная с 80-х годов А. Г. Свешников совместно с С. А. Габовым и их учениками исследует фундаментальные проблемы строгого обоснования новых достаточно полных классов нестационарных процессов как чисто волновых, так и эволюционного типа, в сплошных средах различной природы. Построены и изучены математические модели неустановившихся волновых движений стратифицированных и флотирующих жидкостей, квазистационарных процессов в проводящих средах и полупроводниках, распространения ионизированных волн в плазме и спиновых волн в ферромагнетиках и ряда других физических процессов и явлений. При непосредственном участии А. Г. Свешникова А. В. Тихонравовым и их учениками разработаны и реализованы оригинальные и высокоэффективные методы решения обратных задач синтеза и распознавания многослойных оптических покрытий во всем частотном диапазоне. Совместно с Ю. А. Ереминым и их учениками теоретически обоснована

и практически реализована компьютерная технология метода дискретных источников для решения проблемы идентификации дефектов слоистых структур, включая задачи рассеяния объектами с экстремальными свойствами (наноразмерные частицы, высокие индексы рефракции и т.д.). Совместно с А. Н. Боголюбовым и их учениками проведено строгое исследование задачи о возбуждении металло-диэлектрических волноводов с неоднородным анизотропным заполнением и разработана методика изучения спектральных характеристик нерегулярных волноводов, позволяющая значительно продвинуть теорию «ловушечных мод».

Выдающийся ученый и талантливый педагог А. Г. Свешников с 1971 по 1993 годы заведовал кафедрой математики физического факультета МГУ. Под его руководством кафедра, профессором которой он был избран в 1965 году, сумела с честью преодолеть нелегкие испытания начала девяностых годов.

В 1991 году Алексей Георгиевич был избран действительным членом (академиком) Российской Академии Естественных Наук. Он заслуженный деятель науки РСФСР. Заслуженный профессор МГУ, лауреат Ломоносовской премии МГУ за педагогическую деятельность, награжден орденами «Знак Почета», «Трудового Красного Знамени» и многими медалями и знаками отличия.

Все годы работы в университете А. Г. Свешников отдавал много сил научно-организаторской и редакционно-издательской деятельности, являясь членом редколлегий математической энциклопедии, журнала «Дифференциальные уравнения», «Журнала вычислительной математики и математической физики», РЖ «Математика».

Алексей Георгиевич является истинно русским интеллигентом в самом высоком значении этого слова. Он великолепный знаток и ценитель классической литературы и особенно поэзии. Большой любитель классической музыки, он не пропускал ни одного музыкального вечера, проводимого на физическом факультете. Дипломники и аспиранты, которым посчастливилось быть учениками Алексея Георгиевича, многие из которых стали известными учеными, разъехались по стране и по всему миру, неизменно вспоминают его с большим уважением как мудрого и чуткого Учителя. Очень многим своим ученикам он помог преодолеть различные житейские невзгоды, делая это с высочайшим тактом и деликатностью.

Алексей Георгиевич полон творческих планов. За последние годы совместно со своими учениками А. Б. Альшиным, М. О. Корпусовым и Ю. Д. Плетнером Алексеем Георгиевичем опубликованы две монографии, посвященные приложениям нелинейного функционального анализа к уравнениям в частных производных, в частности, к проблемам глобальной и локальной разрешимости широких классов задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных высокого порядка. Он продолжает активно работать с новыми учениками, под его руководством в последние годы подготовлены две кандидатские диссертации, одна из которых успешно защищена, а вторая принята к защите.

Поздравляя Алексея Георгиевича со славным юбилеем, от всей души желаем ему крепкого здоровья и больших творческих успехов в его многогранной научной и педагогической деятельности.

**Редакция журнала, коллеги и друзья сердечно поздравляют
Алексея Георгиевича со славным Юбилеем, от всей души желают ему
крепкого здоровья, счастья, удачи и больших творческих успехов
в его многогранной научной и педагогической деятельности!**



К 80-ЛЕТИЮ ВАЛЕНТИНА ФЕДОРОВИЧА БУТУЗОВА



23 ноября 1999 года исполняется 80 лет со дня рождения профессора Московского государственного университета Валентина Федоровича Бутузова.

Научная, педагогическая и общественная деятельность В. Ф. Бутузова неразрывно связаны с физическим факультетом МГУ, на который он поступил в 1957 году. Уже в студенческие годы В. Ф. Бутузов начал заниматься научной работой, присоединившись к научной группе, руководимой зав. кафедрой математики физического факультета МГУ Андреем Николаевичем Тихоновым (впоследствии академиком). Эта научная группа развивала асимптотическую теорию сингулярных возмущений, в частности, теорию дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.

Окончив в 1963 году физический факультет В. Ф. Бутузов поступил в аспирантуру и в 1966 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотика решений некоторых задач для интегро-, дифференциальных уравнений с малым параметром при производной». После защиты кандидатской диссертации В. Ф. Бутузов был оставлен на работу на кафедре математики физического факультета. В то время А. Б. Васильевой, под непосредственным руководством которой работал В. Ф. Бутузов, было построено асимптотическое разложение решений начальных и краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, состоящее из суммы регулярного ряда (обыкновенного степенного ряда по малому параметру) и ряда (или рядов) специального вида — так называемых пограничных рядов. Эти ряды, члены которых называются пограничными функциями, существенны в окрестности тех точек, где заданы граничные условия.

В 1973 г. выходит монография А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений», а в 1978 г. вторая монография тех же авторов, посвященная так называемым критическим случаям.

Третья монография А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова «Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений» посвящена в большой мере уравнениям с частными производными и включает в себя результаты докторской диссертации В. Ф. Бутузова, а также результаты по методу сглаживания и работы прикладного характера, выполненные В. Ф. Бутузовым вместе с появившимися у него учениками (Н. Н. Нефедов, А. В. Нестеров — ныне доктора наук, Л. В. Калачев и др.) Эта монография с некоторыми дополнениями вышла в 1995 г. в США (в соавторстве с Л. В. Калачевым).

Результаты Валентина Федоровича отражены в многочисленных статьях и докладах на конференциях. Он является автором более 270 статей.

Научная работа В. Ф. Бутузова неразрывно связана с его педагогической деятельностью. С 1993 по 2014 гг. В. Ф. Бутузов заведовал кафедрой математики физического факультета, являясь прямым наследником А. Н. Тихонова и А. Г. Свешникова. Ценным учебным пособием для студентов физического факультета (и не только его) является книга «Математический анализ в вопросах и задачах» (изд. Высшая школа, 1986, 1988, 1993), написанная совместно с сотрудниками кафедры математики физического факультета и под редакцией В. Ф. Бутузова. Эта книга переведена на английский и испанский языки.

Успехи В. Ф. Бутузова отмечены рядом наград и премий: почетной грамотой Министерства просвещения РСФСР за создание пробных учебников по математике для средней школы (1981 г.), почетным знаком «Отличник народного просвещения» (1985 г.), медалью «За трудовое отличие» (1986 г.), дипломом Государственного комитета СССР по народному образованию (1989 г.), премией им. М. В. Ломоносова за педагогическую деятельность (1993 г.), медалью «В память 850-летия Москвы» (1997 г.), званием «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» (1999 г.), премией им. М. В. Ломоносова за научную работу 1-ой степени (2003 г.), медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени (2016 г.).

**Редакция журнала, коллеги и друзья от всей души поздравляют
Валентина Федоровича с 80-летием, желают ему крепкого здоровья,
удачи и дальнейших творческих успехов в научной
и педагогической деятельности!**



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.634

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
НА ОСНОВЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ

© Авторы, 2019

doi: 10.25210/jfop-1903-07018

Боголюбов А. Н. — д. ф.-м.н., профессор кафедры математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. E-mail: bogan7@yandex.ru**Боголюбов Н. А.** — к. ф.-м.н., м.н.с. кафедры математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. E-mail: russell67@yandex.ru**Домбровская Ж. О.** — к. ф.-м.н., сотрудник кафедры математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. E-mail: dombzhanna@yandex.ru**Мухартова Ю. В.** — к. ф.-м.н., доцент кафедры математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. E-mail: muhartova@yandex.ru**Аннотация**

Рассматривается математическое моделирование метапленок и электродинамических систем (волноводы, резонаторы), построенных с использованием метаматериалов.

Ключевые слова: метапленка, киральное заполнение, задача синтеза, метод конечных разностей, метод конечных элементов

Abstract

The mathematical modeling of metafilms and electrodynamic systems (waveguides, resonators), constructed using metamaterials, is considered.

Keywords: metafilm, chiral filling, synthesis problem, finite difference method, finite element method

Введение

Интенсивное развитие различных областей радиоэлектронной промышленности потребовало разработки принципиально новых материалов, сильно взаимодействующих с электромагнитными волнами. Метаматериалы — это искусственно структурированные композитные материалы, способные так взаимодействовать с электромагнитным полем, как это не могут делать природные материалы [1].

В понятие метаматериалов включают большое количество различных физических объектов. Например, это структуры, образованные из резонансных частиц, размер которых меньше либо сопоставим с длиной волны падающего излучения. К метаматериалам относятся структуры, в которых между частицами возникает сильное электромагнитное взаимодействие. Это приводит к большому коллективному отклику [2]. Метаматериалы можно условно разделить на несколько групп: бианизотропные, биизотропные, в частности, киральные среды, а также материалы-«левши» (Left Handed Materials).

На данный момент можно выделить множество направлений и научных проблем, исследуемых и решаемых в области электродинамики и оптики метаматериальных сред, имеющих как чисто теоретический интерес, так и широкое практическое применение, например, в построении интегрированных оптических приборов и микросхем, волноведущих и волнопередающих систем, проектировании антенн и поглощающих покрытий с заданными электродинамическими свойствами, а также во многих других областях радиотехники и прикладной электродинамики.

Применение новых материалов даёт неоспоримые преимущества по сравнению с традиционно используемыми средами. В связи с этим для многих приложений требуются алгоритмы, которые позволили бы с высокой гарантированной точностью производить численный эксперимент. Однако использование большинства аналитических методов либо сильно осложняется, либо становится невозможным для новых типов сред. Возникает необходимость применять численные методы и компьютерное моделирование. Существует достаточно много методов, получивших широкое распространение, которые потенциально применимы и для моделирования устройств со сложным заполнением. Вместе с тем большое значение при моделировании электродинамических систем на основе метаматериалов приобретает теоретическое исследование начально-краевых и краевых задач, лежащих в основе построения соответствующих моделей. Наконец, для ряда задач возможно построение решения чисто аналитическими методами.

В связи с широким применением в радиофизике, оптике, акустике и в ряде других областей метаматериалов, весьма остро встает вопрос о построении и исследовании математических моделей, описывающих

физические процессы, происходящие в подобных системах. Большинство из таких моделей представляет собой краевые и начально-краевые задачи математической физики. Такие исследования, представляя значительный самостоятельный интерес, позволяют выбирать для их решения наиболее оптимальные численные методы, а также модифицировать уже известные методы или создавать и реализовывать в виде алгоритмов новые экономичные методы расчета подобных систем и устройств, позволяющие численно исследовать их наиболее полные математические модели. Насущной необходимостью является исследование этих алгоритмов методами математической физики.

Численные и аналитические методы, применяемые при исследовании электродинамических систем на основе метаматериалов

Численные методы, применяемые для расчета электродинамических систем на основе метаматериалов, более универсальны, чем аналитические, но одновременно значительно более трудоемки. Они основаны на той или иной аппроксимации основных исходных уравнений (в данном случае таковыми являются уравнения Максвелла) и дальнейшем решении полученной алгебраической системы.

При расчете электродинамических систем на основе метаматериалов, как правило, используются методы, разработанные для расчета подобных систем, построенных без применения метаматериалов. Обзор таких методов дан в [3].

Одним из самых мощных и универсальных методов численного решения задач расчета волноведущих систем со сложной геометрией и сложным заполнением, в частности, на основе метаматериалов является метод конечных разностей (МКР) [4]. Этот метод позволяет создавать высокоэффективные алгоритмы для решения как прямых задач расчета волноведущих систем, так и обратных задач синтеза подобных систем [5].

Основные моменты применения метода конечных разностей к расчету киральных волноведущих систем, общие для расчета всех волноведущих систем, отмечены в [6].

В настоящее время для расчета нестационарных задач наиболее популярен метод конечных разностей во временной области (FDTD — finite-difference time-domain) [7]. На основе этого метода разработано большое количество явных и неявных схем [8,9], из которых наиболее употребительной является явная схема Йе [10], лежащая в основе многих коммерческих пакетов. По существу, это схема «с перешагиванием» («leap-frog»). Основным достоинством схемы Йе является ее малая трудоёмкость. Однако шаблон схемы Йе занимает более одной ячейки сетки (то есть эта схема не является компактной). Поэтому для применения этой схемы особую трудность представляют задачи в слоистых средах, когда параметры среды являются разрывными. Если разрывной является только диэлектрическая проницаемость среды ϵ , а магнитная восприимчивость μ непрерывна (либо наоборот, непрерывна ϵ , а μ испытывает разрыв), то расчет с использованием схемы Йе провести удастся, но на границах раздела сред точность расчетов сильно снижается, что неоднократно отмечалось в литературе [11,12].

До настоящего момента оценка точности расчетов методом FDTD производилась лишь для задач, для которых известно точное решение (см., например, [13]). В прикладных задачах, где точное решение неизвестно, расчеты по схеме Йе дают информацию о качественном поведении решения, однако получить количественную оценку точности не удастся.

При проведении расчетов на сгущающихся сетках конечно-разностные методы позволяют получить решение с точностью вплоть до ошибок округления компьютера, которые определяются разрядностью чисел и обусловленностью задачи. Для погрешности численного расчета можно построить асимптотически точную оценку методом Ричардсона [14], которая имеет строгое математическое обоснование [15]. В электродинамических задачах метод сгущения сеток ранее практически не применялся. Весьма актуальной является разработка подходов для расчетов слоистых диэлектрических сред методом FDTD, позволяющих проводить вычисления с высокой гарантированной точностью.

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод для решения самых разнообразных задач математической физики и техники. Популярность этого метода объясняется простотой его физической интерпретации, а также ясностью и четкостью численного алгоритма, что существенно облегчает программирование сложных задач математической физики [16]. В своей основе метод конечных элементов является вариационным, или в более широком плане, проекционным методом [17].

Исходная область, в которой ищется решение, разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых используются, как правило, четырехугольники или треугольники. Решение локально аппроксимируется кусочно-полиномиальными функциями. Делая подобласти достаточно малыми, либо выбирая достаточно высокую степень полиномов, можно добиться того, чтобы аппроксимирующая

функция достаточно точно передавала локальное поведение решения. Этот метод может применяться для областей произвольной формы и граничных условий общего вида, причем возможно нерегулярное разбиение области. Таким образом, на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов без использования глобальной фиксированной системы координат.

В проекционно-сеточных методах используется слабая формулировка исходной задачи, когда искомого решения должно удовлетворять не дифференциальной краевой задаче, а некоторому интегральному соотношению. Локальная аппроксимация решения аналогична разложению его по системе финитных базисных функций, носителями которых являются подобласти разбиения (конечные элементы). В силу выбора системы базисных функций коэффициенты разложения оказываются равными значениям разлагаемой функции в вершинах многоугольников разбиения (узлах сетки). Для определения этих коэффициентов используется либо вариационный подход, когда коэффициенты находятся из условия минимизации функционала (методы типа Рунца), или проекционный подход, когда коэффициенты определяются из проекционных соотношений ортогональности невязки к линейной оболочке системы базисных функций (метод типа Галеркина). В результате исходная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений весьма высокого порядка с сильно разреженной матрицей, то есть к разностной схеме. Таким образом, проекционно-сеточные методы, как это и следует из их названия, являются комбинацией собственно проекционных методов и конечно-разностных (сеточных) методов. Полученная в результате разностная задача (схема) обрабатывается в дальнейшем стандартными методами, разработанными в теории разностных схем.

Первые попытки применения метода конечных элементов к расчету волноведущих систем относятся к середине шестидесятых годов прошлого века. К этому времени техника этого метода была хорошо разработана, и он успешно применялся для решения граничных задач механики. Были построены достаточно эффективные алгоритмы и на их основе созданы программы для обработки разреженных матриц, возникающих при решении методом конечных элементов начально-краевых задач. Первые работы были посвящены расчетам с помощью метода конечных элементов металлодиэлектрических волноводов, затем разработанная в этих работах техника была обобщена на открытые волноведущие структуры с произвольной формой поперечного сечения.

При применении метода конечных элементов к расчету волноведущих систем выяснилось, что не все получаемые решения имеют физический смысл и соответствуют реально распространяющимся модам [18]. Проблема борьбы с фиктивными решениями, называемыми часто «духами», является одной из актуальных и сложных. Существуют два основных подхода к борьбе с ними: апостериорный, когда истинные моды отделяют от фиктивных после процесса вычислений, и априорный, когда используются такие постановки задач, при которых фиктивные решения не возникают [19, 20]. Одним из достаточно эффективных методов борьбы с нефизическими решениями является также использование в методе конечных элементов смешанных конечных элементов [21].

Весьма перспективным подходом в плане применения метода конечных элементов к математическому моделированию волноведущих систем является использование суперэлементов. Этот метод был предложен в работах Л.Г. Страховой и Р.П. Федоренко и использовался для решения ряда сложных задач диффузии, теории упругости, кинетики ядерных реакций и в некоторых других областях [22].

Отметим, что хотя метод суперэлементов был предложен достаточно давно, теоретически он исследован сравнительно слабо. В этой связи значительный интерес представляет работа [23].

В качестве примера применения метода конечных элементов для расчета волновода с киральным заполнением можно привести работу [24]. Благодаря введению дополнительных граничных условий на нормальные составляющие поля, автору удалось избавиться от появления фиктивных решений и создать весьма экономичный алгоритм, гарантирующий хорошую точность вычислений.

Наряду с численными методами, были разработаны и новые аналитические методы, которые позволяют моделировать ряд электродинамических систем с использованием метаматериалов.

Аналитические методы подразумевают применение некоторой физической модели, используют данные, полученные в результате физического эксперимента [25]. Они относятся к сверхбыстрым, так как решение сводится к расчету по явной формуле. Физические модели позволяют получить достаточно много информации о качественном (и нередко количественном) поведении решения. Эта информация оказывается исключительно полезной при уточнении деталей численных методов и анализе полученных результатов. Однако все такие модели являются приближенными и имеют определенные границы применимости. Так, модели метапленки на подложке, которая обеспечивала бы физическую точность не хуже 1%, на данный момент не предложено.

При математическом моделировании волноведущих систем с использованием метаматериалов достаточно широко применяется метод векторных цепей. Ядром метода векторных цепей является уравнение, содержащее диадную матрицу передачи, которое связывает тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля на противоположных сторонах слоя. Эти соотношения содержат всю информацию о слое и постоянных распространения волн, а матрицы очень полезны при анализе плоских стратифицированных структур, потому что каждый слой может быть представлен своей матрицей, а для получения матрицы, описывающей всю структуру, достаточно будет перемножить матрицы всех слоев. Диадные матричные выражения, связывающие тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на противоположных сторонах пластины, содержат всю необходимую информацию о волноводе и его постоянных распространения. Все соотношения приведены в двумерном пространстве Фурье с постоянной распространения, взятой в качестве переменной Фурье. В зависимости от того, какой набор компонент поля известен, соотношения принимают различный вид. Отметим, что диады известны в математике достаточно давно, однако, с развитием новых методов в электродинамике метаматериалов они вновь получили широкое распространение.

В последние годы для расчета электродинамических систем и устройств с применением метаматериалов все чаще применяются комбинированные методы расчета, включающие в себя комбинации численных и аналитических методов

Моделирование волноведущих систем с заполнением на основе метаматериалов

Как уже отмечалось, в современной высокочастотной электродинамике, волновой и интегральной оптике все более широкое применение находят устройства, построенные с использованием мезоскопических систем — искусственно созданных структурированных материалов (метаматериалов) с характерными размерами структурных элементов от единиц до сотен нанометров [1].

Для произвольной линейной среды связывающие векторы электрического и магнитного полей материальные уравнения имеют следующий вид [1]:

$$\mathbf{D} = a_{11}\mathbf{E} + a_{12}\mathbf{H},$$

$$\mathbf{B} = a_{21}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{H}.$$

Материальные параметры a_{11} , a_{12} , a_{21} и a_{22} зависят от выбора конкретной модели среды. Линейные среды общего вида называются би-анизотропными. Если материальные параметры являются скалярами или псевдоскалярами, то соответствующие среды носят название би-изотропных.

Взаимная би-изотропная среда, у которой один из материальных параметров (коэффициент Теллегена) обращается в ноль, характеризуется тремя комплексными материальными параметрами: диэлектрической проницаемостью ε , магнитной проницаемостью μ и параметром киральности χ . Если параметр киральности отличен от нуля, то такие среды называются киральными или гиротропными. Киральные среды содержат элементы, обладающие зеркальной симметрией.

Теоретическое исследование таких систем методами математической физики представляет весьма важную и интересную задачу. Можно выделить два класса подобных задач: спектральные задачи, заключающиеся в исследовании спектральных свойств волноведущих систем с киральным заполнением, и начально-краевые задачи возбуждения, в которых исследуются процессы возбуждения различных волноведущих систем с киральным заполнением и процессы распространения волн в подобных системах.

В [26] рассмотрена векторная спектральная задача в прямоугольном волноводе с кусочно-постоянным би-изотропным заполнением. Для математического моделирования такого волновода применен метод конечных элементов. Однако, как было отмечено, в случае электродинамических задач в полной векторной постановке метод конечных элементов может приводить к появлению фиктивных решений, так называемых «духов», борьба с которыми сильно снижает эффективность алгоритма, а порой и делает его непригодным для практического использования. Одним из способов борьбы с фиктивными решениями является применение смешанных конечных элементов. Другим эффективным методом борьбы с фиктивными решениями является разработка таких постановок задач, при которых эти решения или не возникают, или же их число резко снижается. В работе [26] разработан и исследован новый вариант обобщенной постановки спектральной задачи, позволяющий использовать вместо смешанных конечных элементов гораздо более простые и экономичные лагранжевые конечные элементы. При этом при применении лагранжевых конечных элементов в рамках данной постановки число появлений нефизических (фиктивных) мод оказывается существенно меньше, чем при стандартной постановке. Основное отличие новой постановки от стандартной постановки заключается в том, что в новой постановке дважды учитывается уравнение для дивергенции электрического поля \mathbf{E} . Проведено исследование данной постановки задачи

методами функционального анализа и показано, что предложенная обобщенная постановка задачи эквивалентна задаче о поиске собственных чисел квадратичного операторного пучка $L(y) = \hat{I} + \hat{C} + \gamma \hat{B} + \gamma^2 \hat{A}$, где операторы \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} — линейные ограниченные операторы, причем оператор \hat{A} самосопряженный и положительно определенный, а \hat{I} — единичный оператор. В силу доказанной в работе компактности операторов \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} спектр пучка состоит только из собственных чисел. Показано также, что вещественных собственных чисел может быть лишь конечное число, и приведены условия, при которых рассматриваемый операторный пучок может иметь вещественные собственные числа: если параметры a_{11} , a_{22} заполнения волновода вещественны, и выполнено равенство $a_{12}^* = a_{21}$, где звездочкой обозначено комплексное сопряжение, то операторный пучок $L(\gamma)$ может иметь вещественные собственные числа.

На основе разработанного варианта обобщенной постановки спектральной задачи для волновода с идеально проводящими стенками и кусочно-постоянным би-изотропным заполнением в [27] построен и реализован с использованием лагранжевых конечных элементов алгоритм расчета постоянных распространения.

Предложенный алгоритм протестирован в случае волновода с однородным диэлектрическим заполнением. Полученные результаты с хорошей точностью согласуются с теоретическими результатами. С помощью процедуры Эйткена [28] получены апостериорные оценки точности для волновода с однородным диэлектрическим заполнением и для кирально-диэлектрического волновода.

Построенный алгоритм был применен для расчета дисперсионных кривых и распределения полей мод в волноводах с заполнением в виде различной комбинацией би-изотропных, в частности киральных, и диэлектрических кусочно-постоянных элементов. Из построенных графиков следует, что наличие киральности усложняет структуру дисперсионных кривых, снимает вырождение и приводит к тому, что дисперсионные кривые могут пересекаться.

В [29] рассматривается алгоритм для решения спектральных задач синтеза волноведущих систем с кирально-диэлектрическим заполнением.

Задачи синтеза относятся к классу обратных задач математической физики. В отличие от обратных задач распознавание, для которых наиболее существенной чертой является требование единственности решения, в задачах синтеза требование единственности решения, как правило, отсутствует. Вариативность возможных решений рассматриваемой задачи синтеза является ее существенным достоинством, поскольку из нескольких наборов возможных значений оптимальных параметров («веера решений») мы можем выбирать то решение, которое является наиболее приемлемым, например, с экономической точки зрения (наиболее дешевое), или же с технологической точки зрения (оптимальная конструкция при таком наборе параметров будет наиболее простой).

Решением задачи синтеза является определение тех значений параметров синтезируемого объекта, при которых этот объект обладает в пределах заданной точности требуемыми характеристиками.

В основе алгоритма синтеза лежит методика решения задач синтеза в электродинамике, предложенная А.Г. Свешниковым и А.С. Ильинским [30,31], основанная на методе регуляризации А.Н. Тихонова [32]. Алгоритм разработан с использованием метода Нелдера и Мида, применимого для поиска минимума функционала в неограниченной области, и метода скользящего допуска, применимого для случая области с ограничениями [33,34],

С помощью разработанного алгоритма решена практически важная спектральная задача синтеза волноводов с киральным заполнением: определение максимальной частотной полосы одномодового режима для двух первых частот отсечки.

Показано, что наличие специальным образом подобранных киральных элементов в структуре волновода позволяет существенно увеличить частотную полосу одномодового режима и тем самым улучшить его эксплуатационные свойства.

В [35] рассматривается задача исследования электромагнитных экранированных резонаторов с идеально проводящими стенками, заполненных однородным киральным веществом. Сферические и цилиндрические резонаторы находят широкое применение в различных областях науки и техники. Отметим, что математическое решение задачи для сферических резонаторов, заполненных обычной некиральной средой, было получено достаточно давно. Поскольку в настоящее время наблюдается особое внимание к искусственным киральным средам микроволнового диапазона, в которых киральность уже не является малой поправкой, то в связи с этим весьма важно получить обобщение этих решений на случай кирального резонатора.

В данной работе предложен алгоритм исследования экранированных резонаторов, заполненных киральным веществом. В качестве иллюстративного примера рассмотрен сферический киральный резо-

натор, для которого получены выражения для собственных полей и характеристическое уравнение для собственных частот. Проведенный анализ показал, что в киральном резонаторе могут формироваться только гибридные собственные поля, которые при обращении в нуль параметра киральности вырождаются в обычные Е- и Н-колебания. Собственные частоты кирального резонатора оказываются меньше соответствующих частот резонатора, заполненного некиральным веществом.

В [36,37] исследуется задача о возбуждении электромагнитных колебаний заданным распределением зарядов и токов в области с неоднородным киральным заполнением. Область, в которой рассматривается задача, может быть либо конечной с идеально проводящей ограничивающей поверхностью, либо представлять собой дополнение к идеально проводящему ограниченному телу. Вводится специальное функциональное пространство, в котором формулируется обобщенная постановка исследуемой начально-краевой задачи. На основе метода Галеркина доказаны теорема единственности и теорема существования решения обобщенной постановки начально-краевой задачи в киральной области. Дано теоретическое обоснование построения приближенного решения проекционным методом. Применяющийся при доказательстве существования и единственности решения метод Галёркина используется для построения приближённого решения. Полученные результаты являются обобщением на случай киральной среды классических результатов о существовании и единственности решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородностях в среде, которая описывается обычными материальными уравнениями.

Пленки на основе метаматериалов

Для современного эксперимента требуются все более чувствительные детектирующие приборы. Например, в спектроскопических экспериментах нужны линзы со сверхвысоким разрешением, сверхточные спектрографы (особенно со временной разверткой), новые фазовые и амплитудные модуляторы и т.д. Для повышения точности таких экспериментов широко применяют просветление оптических систем, для этого на поверхности линз наносят различные дополнительные покрытия. Для разработки лазеров (особенно рентгеновских) требуются зеркала, способные обеспечить практически полное отражение в заданном диапазоне. Существующие спектрометрические приборы имеют достаточно хорошую разрешающую способность (до 10000), однако требования к точности такого оборудования быстро возрастают.

Возможности традиционных детекторов ограничены, поэтому перспективной выглядит разработка приборов, основанных на новых физических принципах. Одним из актуальных направлений является использование метаматериалов. Наиболее простыми в изготовлении и перспективными являются двумерные метаматериалы (метаповерхности), которые уже сейчас используются для улучшения характеристик разнообразных измерительных устройств (биосенсоров, газоанализаторов, спектрометров), линз со сверхразрешением, светодиодов, голограмм нового поколения, широко используются при разработке различных технических систем: наноразмерных антенн, безотражательных покрытий, поглотителей, зеркал, фазовых и амплитудных масок и др. Поскольку для указанных приложений актуальна разработка метаматериалов с заданными свойствами (просветление, максимальное поглощение, полное отражение и т.д.), встает вопрос о разработке алгоритмов решения обратных задач синтеза таких материалов.

В настоящее время наиболее широко применяются двумерные метаматериалы (метаповерхности), так как они значительно проще в изготовлении, чем трехмерные. Метаповерхность представляет собой периодический массив (слой) частиц, расположенных на подложке или в некоторой среде. Если показатель преломления частиц больше, чем у окружающей среды, то такая метаповерхность называется метапленкой; в противном случае — метаэкраном [38–41]. Частицы, составляющие метаматериал, называются метаатомами. Они могут иметь форму сферы, диска, призмы, пирамиды и т.п. Такие материалы уже сейчас используются для улучшения характеристик разнообразных измерительных устройств (биосенсоров, газоанализаторов, спектрометров), линз со сверхразрешением, светодиодов, голограмм нового поколения, широко используются при разработке различных технических систем: наноразмерных антенн, безотражательных покрытий, поглотителей, зеркал, фазовых и амплитудных масок и др. Поскольку для указанных приложений актуальна разработка метаматериалов с заданными свойствами (просветление, максимальное поглощение, полное отражение и т.д.), встает вопрос о разработке алгоритмов решения обратных задач синтеза таких материалов.

Для решения задач синтеза метапленок с требуемыми характеристиками используется рассмотренная выше процедура решения задач синтеза электродинамических структур, предложенная в работах А.Г. Свешникова и А.С.Ильинского [30,31].

Задача оптимизации геометрических параметров структуры является экстремальной (например, требуется найти минимум либо максимум отражения). Однако отклик метаповерхности на подложке имеет резонансный характер, поэтому экстремумов может быть несколько, то есть решение не единственно. Для устранения нефизических ответов необходимо сформулировать корректную постановку, основанную

на подробном анализе физической модели метапленки. Это сводится к введению ограничений на множество допустимых значений параметров и постановке задачи на условный экстремум.

Кроме того, предварительный анализ зависимости отклика метапленки от варьируемых параметров показывает, что имеются участки крайне медленного изменения (практически горизонтальные плато), на которых стандартные методы минимизации нередко дают сбой. Актуальна разработка подходов, позволяющих сделать решение экстремальной задачи единственным и улучшить надёжность работы алгоритмов оптимизации.

Поскольку при решении задачи синтеза производится многократное решение прямой задачи расчета метапленок, то к алгоритму решения прямой задачи предъявляются достаточно жесткие требования.

Для решения прямой задачи расчета метаповерхностей применяются аналитические и численные методы.

Как было указано ранее, аналитические методы опираются на использование некоторой физической модели. Большинство моделей метаповерхностей построено в рамках дипольного приближения, то есть каждый метаатом заменяется парой из электрического и магнитного диполей (например, [42–45]). Встает вопрос о правомерности и точности такой замены. Кроме того, для учета переотражений от подложки, на которой располагается структура, изотропная метапленка заменяется эквивалентным однородным тонким слоем, т.е. фиктивной границей раздела. Однако даже в нерезонансном случае возможность такого перехода была показана лишь при фиксированной длине волны [46]. Для диапазона длин волн этот вопрос остается открытым.

С начала 2000-х годов было предложено множество аналитических моделей для описания свойств метапленки. Многие авторы строили модели, в которых структура из метаатомов заменялась некоторым эквивалентным однородным слоем с совпадающим электродинамическим откликом (см., например, [47–49]). Материальные параметры эквивалентного слоя рассматривались как эффективные параметры метапленки.

Однако в большинстве работ возникали существенные трудности: не удавалось найти все материальные параметры структуры, что приводило к неоднозначности в их определении. Кроме того, точность построенных моделей оказывалась настолько низкой, что электродинамические характеристики метапленки удавалось описать лишь на качественном уровне, причем, только вдали от резонансов. Вопрос о правомерности и взаимной однозначности замены двумерного метаматериала однородным слоем до сих пор остается открытым.

Наиболее адекватное описание метапленки из сферических частиц было проведено в работах [50,51] (модель Кустера-Холловея) и [52] (модель Евлюхина). Обе модели применимы лишь в дальневолновом приближении, так как в них каждый метаатом заменяется парой электрического и магнитного диполей, то есть по существу является точечным.

Модель Кустера-Холловея построена в [50,51]. Рассматриваются идентичные резонаторы, изготовленные из изотропного материала. Анизотропия допустима, но тогда главные оси кристалла должны быть ориентированы вдоль осей координат, при этих предположениях матрица поляризуемости будет диагональной. Из резонаторов составляется метапленка с одинаковыми периодами по обоим направлениям, находящаяся в однородной среде. На метапленку падает плоская электромагнитная волна. Период p структуры и размер $2r$ рассеивателей малы по сравнению с длиной волны $p, r \ll \lambda$. Согласно модели Кустера-Холловея, такую решетку точечных диполей можно рассматривать как однородно поляризованную поверхность, которая описывается с помощью поверхностных плотностей электрической χ_{es} и магнитной χ_{ms} восприимчивостей. Модель была разработана для произвольного угла падения, однако для простоты мы будем считать, что угол падения $\theta = 0$. Нормальные составляющие χ_{es} и χ_{ms} имеют вид

$$\chi_{es} = \frac{N \langle \alpha_e \rangle}{1 - \frac{N \langle \alpha_e \rangle}{4r_d}}, \quad \chi_{ms} = \frac{N \langle \alpha_m \rangle}{1 - \frac{N \langle \alpha_m \rangle}{4r_d}}.$$

Здесь угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по поверхности метапленки, $N = 1/p^2$ — концентрация частиц, $r_d \approx 0.6956p$ — радиус области влияния метаатома, который фактически является подгоночным параметром.

Таким образом, в данной модели используется гомогенизация метапленки, однако усреднение производится не по объему, а по поверхности. Такой подход представляется довольно грубым, так как при сильном взаимодействии метаатомов распределение токов и зарядов по метапленке, очевидно, является неоднородным.

Модель Евлюхина [52] построена в следующих предположениях. Материал, из которого изготовлены частицы, является однородным и изотропным. Периоды прямоугольной решетки диполей в разных направлениях могут быть неодинаковыми. Рассматривается только случай нормального падения плоской волны. Радиус частиц и периоды решетки малы по сравнению с длиной волны, а последняя мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Каждый метаатом заменяется совокупностью электрического и магнитного диполей и строится точное решение задачи о взаимодействующих точечных диполях.

При этом учитывается взаимодействие диполей одного типа (электрических между собой и магнитных между собой) и «перекрестное» взаимодействие электрических диполей с магнитными. Таким образом, замена метаатома парой диполей является единственным источником погрешности данной модели.

Особенно прост случай, когда периоды решетки совпадают. Тогда коэффициенты отражения и прохождения рассчитываются по формулам

$$R = \frac{ik_0}{2p^2} (\alpha_e^{\text{eff}} - \alpha_m^{\text{eff}}), \quad T = \frac{ik_0}{2p^2} (\alpha_e^{\text{eff}} + \alpha_m^{\text{eff}}),$$

где α_e^{eff} и α_m^{eff} — эффективные электрическая и магнитная поляризуемости, в которых учтено взаимодействие между частицами.

Модель применима для любых значений p и r в рамках дипольного приближения. Подход Евлюхина представляется наиболее адекватным, так как в отличие от модели Кустера-Холлоуея, в нем не производится гомогенизации структуры.

К недостаткам данной модели следует отнести то, что она построена лишь для нормального падения волны на структуру. Кроме того, модель не позволяет описывать метапленку на подложке, поскольку метаатомы погружены в однородную среду.

Обобщения модели Кустера-Холлоуея и модели Евлюхина, учитывающие влияние подложки, были сделаны в работах [53,54] (модель Симовского) и [55] (модель Бабичевой).

Согласно подходу Симовского [53,54], система «метапленка-подложка» рассматривается как эффективная граница раздела, на которой вектора электромагнитного поля претерпевают скачок. Для вывода величины скачка была предложена следующая процедура.

Пусть вместо метапленки на границе раздела воздух-диэлектрик лежит однородная диэлектрическая пластинка конечной толщины L . Предполагается, что материальные параметры пластинки выражаются через χ_{es}/L и χ_{ms}/L , где χ_{es} , χ_{ms} — восприимчивости метапленки, расположенной в воздухе. Решается задача о прохождении волны через систему «воздух-слой-подложка», и вычисляется итоговое изменение полей, обусловленное наличием этой системы. После этого делается предельный переход при $L \rightarrow 0$, это и дает требуемые граничные условия.

Такой подход имеет слабое место — адекватность перехода к допредельному тонкому слою. Однако сравнение с численными расчетами, демонстрирует удовлетворительную точность, данная модель позволяет разумно описать качественный характер спектра. Заметим, что принципиально неустранимым источником ошибки в модели Симовского, как и в упоминавшейся ранее модели Кустера-Холлоуея, является грубая гомогенизация структуры.

При нормальном падении волны коэффициенты отражения R_s и прохождения T_s всей структуры имеют следующий вид:

$$R_s = \frac{(1+e)(1-\sqrt{\varepsilon m}) - (\sqrt{\varepsilon} - e)(1+m)}{(1-e)(1-\sqrt{\varepsilon m}) + (\varepsilon - e)(1-m)},$$

$$T_s = \frac{(1+e)(1+m) + (1-e)(1+m)}{(1-e)(1-\sqrt{\varepsilon m}) + (\varepsilon - e)(1-m)},$$

где e — диэлектрическая проницаемость подложки, $e = ik_0 \chi_{es}/2$ и $m = ik_0 \chi_{ms}/2$. Коэффициент поглощения метапленки на подложке A_s связан с R_s и T_s соотношением

$$|A_s|^2 = 1 - |R_s|^2 - \sqrt{\varepsilon} |T_s|^2.$$

Такой подход был разработан для произвольного угла падения волны, а также обобщен на случай подложки конечной толщины. Однако для расчета отклика всей системы нужно знать отклик метапленки в воздухе. В работах Симовского этот отклик рассчитывался численно, поэтому его модель можно назвать лишь полуаналитической. Это является другим весомым недостатком данного подхода.

Суть модели Бабичевой сводится к следующему [55]. Каждый метаатом заменяется парой электрического и магнитного диполей по модели Евлюхина. Вся метапленка заменяется фиктивной границей раздела, на которой расположены соответствующие точечные диполи. Эта граница проходит через центры сфер. Поэтому между ней и подложкой возникает воздушный зазор толщины r . Его можно рассматривать как интерферометр Фабри-Перо.

Падающая плоская волна амплитуды E_0 проходит через эти границы раздела последовательно. Чем больше скачок показателя преломления на каждой из границ раздела, тем сильнее искажается волна при ее прохождении. В качестве напряженности волны, отраженной от всей структуры E_s^R , можно взять

сумму напряженностей волн, отраженных от метапленки E^R и от подложки E_{substr}^R по отдельности

$$E_s^R = E^R + E_{\text{substr}}^R.$$

Здесь

$$E_{\text{substr}}^R = \frac{TR_{\text{substr}} e^{2ik_0 r}}{1 - RR_{\text{substr}} e^{2ik_0 r}} E_0,$$

а R_{substr} вычисляется по хорошо известной формуле $R_{\text{substr}} = (1 - \sqrt{\epsilon}) / (1 + \sqrt{\epsilon})$. При этом внутренние переотражения, то есть порядки интерференции выше первого, описывающие реальное взаимодействие метапленки с подложкой, не учитываются, что сильно ограничивает точность модели.

Этот вывод был подтвержден результатами численного моделирования, проведенного самими авторами модели [55,56]. Было показано, что между шариком и подложкой существует магнитоэлектрическая связь. Хотя эта связь и слаба, но она не является пренебрежимо малой и проявляется на частотах, расположенных между магнитной и электрической дипольными модами. Это приводит к усилению обоих дипольных резонансов [57].

Несмотря на указанные недостатки, модель Бабичевой позволяет успешно передать положение не только первого магнитного, но и первого электрического дипольного резонанса. Этого вполне достаточно для решения задачи оптимизации. На данный момент эта модель представляется наилучшей.

Заметим, что обе эти модели достаточно грубые, так как учет подложки в них сводится, по существу, к тривиальному суммированию откликов метапленки в воздухе и подложке. Взаимодействие метапленки и подложки фактически игнорируется. Спектры метапленок удается описывать лишь на качественном уровне, для получения более точных результатов требуется подгонка. Однако на данный момент это наиболее адекватные из предлагающихся моделей.

В [58–64] рассматриваются вопросы, связанные с применением метода FDTD для моделирования слоистых сред. Показано, что схема Йе метода конечных разностей во временной области (FDTD) является немонотонной. Продемонстрировано, что при моделировании слоистой диэлектрической среды фактический порядок точности вычислений понижается до первого. Для преодоления этой проблемы предложено проводить расчеты на сгущающихся сетках и рекуррентно уточнять решение по методу Ричардсона–Калиткина. Данный подход не требует модификации стандартных уравнений и может быть использован к расчетам, как на равномерных, так и на произвольных квазиравномерных сетках.

В качестве тестовых задач рассмотрено распространение нормированного гауссова импульса в свободном пространстве и через слоистую диэлектрическую среду (кремниевую пластинку, помещенную в воздухе). Проведены вычисления с многократным повышением порядка точности (до 6 в задаче о распространении импульса в однородном веществе и до 4 в задаче о прохождении импульса через границу раздела диэлектриков). Впервые для данного класса задач получена апостериорная асимптотически точная оценка погрешности сеточного решения. При помощи процедуры рекуррентного уточнения получено уменьшение фактической погрешности до 10^6 – 10^9 раз (в зависимости от задачи).

Для жестких задач электродинамики (слоистые диэлектрические среды с большим контрастом показателей преломления, а также задачи со скин-слоями) предложены квазиравномерные сетки, обеспечивающие примерно одинаковое число узлов во всех характерных участках решения. Построенные сетки обеспечивают достаточно мелкий шаг в оптически плотной среде (или внутри скин-слоя) и вблизи границ раздела сред, где велика кривизна решения. Это также позволяет улучшить фактическую точность расчета.

Работы [65–71] посвящены моделированию метапленок из сферических частиц. В них впервые получены границы применимости дипольного приближения для оптически прозрачного шара. В отличие от известных ранее подходов, предлагаемый критерий дает также количественную оценку точности дипольного приближения. Показано, что положения электрического и магнитного дипольных резонансов такого шара описываются линейными соотношениями между длиной падающей волны, деленной на радиус шара, и показателем преломления материала.

Исследованы границы применимости и дана оценка точности ряда известных моделей метапленки из сферических частиц в однородной непоглощающей среде. Предложена оригинальная модель описания метапленки при помощи эквивалентного однородного слоя. Рассмотрены границы ее применимости. Показано, что толщина этого слоя является частотно зависимой.

Проектирование безотражательного покрытия на основе метапленки рассматривается в работах [25,72–74], в которых сформулирована математическая постановка задачи о безотражательном покрытии на основе метаповерхности. Рассмотрены два случая: одна длина волны и диапазон длин волн. Найдена область допустимых значений геометрических параметров структуры, которая, в частности, обеспечивает применимость дипольного приближения. Благодаря этому прямую задачу удается решать с использованием аналитических моделей, построенных в дипольном приближении. Учет этих ограничений в постановке приводит к задаче на условный экстремум, которая методом штрафных функций сводится к задаче на без-

условный экстремум. Предложена гладкая штрафная функция, которая допускает применение методов минимизации высокого порядка с разностным вычислением градиента.

В качестве примера рассмотрена задача о безотражательной метаповерхности из сферических частиц PbTe, помещенных на подложку из Ge. Для такой структуры проведено сравнение моделей Симовского и Бабичевой. Эти модели дают различное количество и глубину минимумов отражения.

Проведено сравнение спектра отражения указанной метапленки на германиевой подложке и тонкой просветляющей пленки из материала «Иртран 2» на той же подложке. Метапленка позволяет получить нулевое отражение на заданной длине волны (чего не удастся добиться при использовании обычных тонких пленок), но диапазон малого отражения для нее оказывается уже. Таким образом, метапленка может использоваться как фильтрующий элемент с резонансной передаточной функцией. Ее применение перспективно для разработки усовершенствованных балометрических матриц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00593А).

Список литературы

1. *Solytar, L., Shamonina, E.* Waves in Metamaterials // IEEE N.Y.: Oxford University Press. 2009. ISBN: 978-0-19-921533-1
2. *Engheta, N., Ziolkowski, R.W.* Metamaterials: Physics and Engineering Explorations // Wiley-IEEE Press. 2006. ISBN-13978-0-471-76102-0
3. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Н.А.Боголюбов Н.А.* Математическое моделирование волноведущих систем методом конечных разностей и конечных элементов // Физические основы приборостроения. 2013. Т. 2. № 1. С. 16–25
4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем // М.: Наука, 1983. 616с.
5. *Боголюбов А. Н., Красильникова А. В., Минаев Д. В., Свешников А. Г.* Метод конечных разностей для решения задач синтеза волноведущих систем // Математическое моделирование. 2000, Т. 12. № 1. С. 13–24
6. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В., Минаев Д. В., Свешников А. Г.* Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39–54
7. *Taflove, A.S., Hagness, S.C.* Computational Electrodynamics: the Finite Difference Time // Domain Method. Artech House, 2005. Vol. 3. P. 273–328.
8. *Taflove, A., Johnson, S.G., and Oskooi, A.* Advances in FDTD Computational Electrodynamics: Photonics and Nanotechnology.// IEEE Artech House. 2013. ISBN-13: 978-1-60807-170-8
9. *Inan, U.S., Marshall, R.A.* Numerical Electromagnetics. The FDTD Method.// Cambridge University Press, 2011. P. 385–390
10. *Yee, K.S.* Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media // Trans. Antennas. Propag. 1966. Vol. 14. P. 302–307
11. *Cangellaris, A.C., Wright, D.B.* Analysis of the Numerical Error Caused by the Stair-Stepped Approximation of a Conducting Boundary in FDTD Simulations of Electromagnetic Phenomena // Trans. Antennas Propag. 1991. Vol. 39. No. 10. P. 1518–1525
12. *Christ, A., Benkler, S., Frohlich, J., Kuester, N.* Analysis of the Accuracy of the Numerical reflection Coefficient of the Finite-Difference Time- Domain Method at Planar Material Interfaces // Trans. Electromagn. Compat.2006. Vol. 48. No. 2. P. 264–272
13. *Taflove, A., Brodwin, M.E.* Numerical Solutions of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems // Trans. Microw. Theory Techniques. 1975. Vol. 23. P. 623–630
14. *Richardson, L.F., Gaunt, A.* The Deferred Approach to the Limit // Philos. Trans. Royal Soc. A. 1927. Vol. 226. No. 636–646. P. 299–361
15. *Рябенский В. С., Филиппов А. Ф.* Об устойчивости разностных уравнений // М.: Изд-во технико-теоретической литературы. 1956.
16. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Лавренова А.В.* Метод конечных элементов в задачах волноводной дифракции // Электромагнитные волны. 2004. Т. 9. № 8. С. 22–25.
17. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы // М.: Наука. 1981. 416с.
18. *Angkaew, T.M., Matsuhara, M., and Kumaga, N.* Finite-Element Analysis of Waveguide Modes: a Novel Approach That Eliminates Spurious Modes // Trans. Microwave Theory Tech. 1987 V. MTT-35. P. 117–123.
19. *Svedin, J.* A Numerically Efficient Finite-Element Formulation for the General Waveguide Problem Without Spurious Modes //Trans. Microwave Theory Tech. 1989. Vol. 37, P. 1708–1715
20. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* Расчет диэлектрических волноводов методом конечных элементов, исключающий появление нефизических решений // Вестник Московского университета, Сер. 3, Физика, Астрономия. 1996, № 1. С. 9–13.
21. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А. Г.* Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 5. С. 39–54.
22. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику // М.: Издательство МФТИ. 1994. 528с.
23. *Галахин М. П., Савенков Е. Б.* К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 5. С. 713–729
24. *Svedin, J.A.M.* Propagation Analysis of Chirrowaveguides Using the Finite-Element Method // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1990. Vol. 38. No. 10.
25. *Белокопытов Г.В., Боголюбов А.Н., Домбровская Ж.О., Терехов Ю.Е.* Расчет электродинамических характеристик метапленки. Экспериментально-аналитический подход // ФОП. 2015. Т. 4, № 1. С. 5–11
26. *Mukhartova, Yu.V., Bogolyubov, N.A.* Spectral Problem in a Waveguide with Homogeneous Bi-Isotropic Filling // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. No. 6. P. 977–983.
27. *Mukhartova, Yu.V., Bogolyubov, A.N.* Calculating the Spectral Characteristics of a Waveguide with Homogeneous Bi-Isotropic Filling by the Finite Element Method // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. Vol. 7. No. 4. P. 323–330
28. *Калиткин Н.Н.* Численные методы // СПб.: БХВ-Петербург. 2011. 592с. ISBN978-5-9775-0500-0
29. *Боголюбов Н.А., Буткарев И.А., Мухартова Ю.В.* Синтез слоистого кирально-диэлектрического волновода // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015. № 3.
30. *Свешников А. Г.* Прямые и обратные задачи электродинамики // Проблемы математической физики и вычислительной математики. 1979. С. 287–297

31. Свешников А. Г., Ильинский А. С. Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 5. С. 1077–1080
32. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач // М.: Наука. 1986. 285 с.
33. Nedler, J.A., Mead, R. A Method of Function Optimization // The Computational Journal. 1965. Vol. 7. P. 308–313
34. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование // М.: Мир, 1975. 534 с.
35. Боголюбов А. Н., Мухартова Ю. В., Гао Цзесин Исследование киральных электродинамических систем // Журнал радиоэлектроники. № 4. С. 4. М.: Издательство: Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук. 2011.
36. Боголюбов А. Н., Мухартова Ю. В., Гао Ц. Возбуждение электромагнитных колебаний в области с киральным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1721–1728. (Bogolyubov, A. N., Gao, J., Mukhartova, Y. V. Excitation of Electromagnetic Oscillations in a Domain with Chiral Filling // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51. No. 9. P. 1614. DOI: 10.1134/S0965542511090053)
37. Боголюбов А. Н., Мухартова Ю. В., Гао Ц. Начально-краевая электромагнитная задача в области с киральным заполнением // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2010. № 5. С. 32–37. (Bogolyubov A. N., Mukhartova Y. V., Gao D. The Electromagnetic Initial Boundary Value Problem in a Domain with a Chiral Filling // Moscow University Physics Bulletin. 2010. Vol. 65. No. 5. P. 366–371. DOI: 10.3103/S0027134910050061)
38. Holloway, C. L., Dienstfrey, A., Kuester, E. F., O'Hara, F., Azad, A. K., and Taylor A. J. A Discussion on the Interpretation and Characterization of Metals/Metasurfaces: the Two-Dimensional Equivalent of Metamaterials // Metamaterials. 2009. Vol. 3. No. 2. P. 100–112.
39. Glybovski, S.B., Tretyakov, S.A., Belov, P.A., Kivshar, Y.S., and Simovski, C.R. Metasurfaces: From Microwaves to Visible // Phys. Rep. 2016. Vol. 634. P. 1–72.
40. Chen, H., Taylor, A. J. A Review of Metasurfaces: Physics and Applications // Rep. Prog. Phys. 2016. Vol. 79. P. 076–401
41. Decker, M., Staude, I. Resonant Dielectric Nanostructures: a Low-Loss Platform for Functional Nanophotonics // J. Opt. 2016. Vol. 18. No. 10. P. 103–142
42. Kuester, A.J., Mohamed, M.A., Piket-May, M., Holloway, C.L.. Averaged Transition Conditions for Electromagnetic Fields at a Metafilm // Trans. Antennas Propag. 2003. Vol. 51. No. 10. P. 2641–2651
43. Holloway, C.L., Mohamed, M.A., Kuester, E.F., Dienstfrey, A.. Reflection and Transmission Properties of a Metafilm: with an Application to a Controllable Surface Composed of Resonant Particles // Trans. Electromagn. Comp. 2005. Vol. 47. P. 853–865
44. Белокопытов Г. В., Журавлев А. В.. Дипольная поляризуемость сферических частиц // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11. № 1. С. 41–49.
45. Evlyukhin, A.B., Reinhardt, C., Seidel, A., Luk'Yanchuk, B., Chichkov, B. Optical Response Features of Sinanoparticle Arrays // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. № 4. P. 045404
46. Saenz, E., Ikonen, P., Gonzalo, R., Tretyakov, S.A. On the Definition of Effective Permittivity and Permeability for Thin Composite Layer // J. Appl. Phys. 2007. Vol. 101. P. 114910
47. Evlyukhin, A.B., Reinhardt, C., Seidel, A., Luk'Yanchuk, B., Chichkov, B. Optical Response Features of Sinanoparticle Arrays // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. No. 4. P. 045404
48. Smith, D. R., Schurig, D., and Mock, J. J. Characterization of a Planar Artificial Magnetic Metamaterial Surface // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 036604.
49. Driscoll, T., Andreev, G. O., Basov, D. N., Palit, S., Ren, T., Mock, J., Cho, S.Y., Jokerst, N.M., and Smith, D.R. Quantitative Investigation of Terahertz Artificial Magnetic Resonance Using Oblique Angle Spectroscopy // Appl. Phys. Lett. 2007. Vol. 90. P. 092508
50. Kuester, E. F., Mohamed, M.A., Piket-May, M., Holloway, C.L.. Averaged Transition Conditions for Electromagnetic Fields at a Metafilm // Trans. Antennas Propag. 2003. Vol. 51. No. 10. P. 2641–2651
51. Holloway, C.L., Mohamed, M.A., Kuester, E.F., Dienstfrey, A. Reflection and Transmission Properties of a Metafilm: with an Application to a Controllable Surface Composed of Resonant Particles // Trans. Electromagn. Comp. 2005. Vol. 47. No. 4. P. 853–865
52. Evlyukhin, A.B., Reinhardt, C., Seidel, A., Luk'Yanchuk, B., Chichkov, B. Optical Response Features of Sinanoparticle Arrays // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. No. 4. P. 045404.
53. Morits, D. K., Simovski, C. R. Electromagnetic Characterization of Planar and Bulk Metamaterials: a Theoretical Study // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. No. 16. P. 165114
54. Albooyeh, M., Morits, D., Simovski, C. R. Electromagnetic Characterization of Substrated Metasurfaces // Metamaterials. 2011. Vol. 5. No. 4. P. 170. ISBN: 978–952–60–62–10–5
55. Babicheva, V. E., Petrov, M. I., Baryshnikova, K. V., Belov, P. A. . Reection Compensation Mediated by Electric And. Magnetic Resonances of All-Dielectric Metasurfaces // J. Opt. Soc. Am. B. 2017. Vol. 34. No. 7. P. D18–D28. DOI: 10.1364/JOSAB.34.000D18
56. Baryshnikova, K.V., Petrov, M.I., Babicheva, V.E., Belov, P.A. Plasmonic and Silicon Spherical Nanoparticle Antireflective Coatings // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. P. 22136. DOI: 10.1038/Scrp22136
57. Miroshnichenko, A. E., Evlyukhin, A. B., Kivshar, Yu. S., and Chichko, B. N. Substrate-Induced Resonant Magnetoelectric Effects for Dielectric Nanoparticles // ACS Photonics. 2015. Vol. 2. No. 10. P. 1423–1428. DOI: 10.1021/Acsphotonics.5b00117
58. Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н.. Повышение точности одномерной схемы Йе методом сгущения сеток // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2017. Т. 81. № 1. С. 117–120. DOI: 10.7868/S0367676517010112
59. Dombrovskaya, Zh.O., Bogolyubov, A.N. High Order FDTD Computations Using Mesh Thickening // Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS). St. Petersburg, Russia, 22–25 May, 2017. Xplore Digital Library. P. 453–455. DOI: 10.1109/Piers.2017.8261783
60. Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н. Анализ точности и сходимости одномерной схемы Йе методом сгущения сеток // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2016. № 3. С. 163112–1–163112–3
61. Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н. Немонотонность схемы FDTD при моделировании границ раздела между диэлектриками // Ученые записки физического факультета Московского Университета. 2017. № 4. С. 1740302–1740306.
62. Домбровская Ж. О. Метод конечных разностей во временной области для кусочно-однородных диэлектрических сред // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 539–547. DOI: 10.18255/1818–1015–2016–5–539–547
63. Dombrovskaya, Zh.O., Bogolyubov, A.N. Effective FDTD Modeling of Microwave Ceramics // Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS). St. Petersburg, Russia, 22–25 May, 2017. Xplore Digital Library. P. 2732–273. DOI: 10.1109/PIERS.2017.8262216
64. Боголюбов А. Н., Белокопытов Г. В., Домбровская Ж. О. Моделирование спектральных зависимостей для двумерных фотонно-кристаллических систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2013. № 5. С. 8–13.

65. *Dombrovskaya, Zh. O., Zhuravlev, A. V.* Investigation of the Possibility of metafilm Modeling as a Conventional Thin Film // *Appl. Phys. A.* 2017. Vol. 123. No. 1. P. 27–1–27–5. DOI: 10.1007/s00339-016-0642-2
66. *Домбровская Ж.О., Журавлев А.В.* Моделирование изотропной метапленки с помощью тонкой пленки с частотно зависимой толщиной // *Ядерная физика и инжиниринг.* 2017. Т. 8. № 1. С. 122–126. DOI: 10.1134/S2079562917010079
67. *Dombrovskaya, Zh. O., Zhuravlev, A. V.* Is it Possible to Replace an Isotropic Metafilm by a Homogeneous Layer? // 11th International Congress on Engineered Materials Platforms for Novel Wave Phenomena (Metamaterials). Marseille, France, 28–31 August, 2017. IEEE Xplore Digital Library. P. 85–87. DOI: 10.1109/MetaMaterials.2017.8107847
68. *Dombrovskaya, Zh. O., Zhuravlev, A.V.* Possibility of Isotropic Metafilm Representation by an Equivalent Homogeneous Layer // Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS). St. Petersburg, Russia, 22–25 May, 2017. IEEE Xplore Digital Library. P.3365–336. DOI: 10.1109/Piers.2017.8262338
69. *Dombrovskaya, Zh. O., Zhuravlev, A. V., Belokopytov, G. V., and Bogolyubov, A. N.* Phonon-Polariton Meta-Atoms for Far Infrared Range // *Physics of Wave Phenomena.* 2016. Vol. 24. No. 2. P. 96–102. DOI: 10.3103/S1541308X16020023
70. *Рыбина А.В., Домбровская Ж.О., Боголюбов А.Н.* Дипольный отклик Диэлектрического шара // *Известия Российской академии наук. Серия физическая.* 2018. Т. 82. № 11. С. 1379–1381. DOI: 10.3103/S1062873818110205
71. *Dombrovskaya, Zh.O., Rybina, A.V., Belov, A.A., and Bogolyubov, A. N.* All-Dielectric Metasurface Filters for Mid-Infrared Range // *Journal of Physics: Conference Series.* 2018. Vol. 1092. P. 012023–1–012023–4. DOI: 10.1088/1742-6596/1092/1/012023
72. *Домбровская Ж.О.* Проектирование изотропной полностью диэлектрической метаповерхности на подложке // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. (Электронный научный журнал).* 2017. Т. 18, № 4. С. 455–462.
73. *Домбровская Ж.О., Журавлев А.В., Белокопытов Г.В., Боголюбов А.Н.* Обратная задача восстановления характеристик мета-атома по измеренному прохождению и отражению метапленки // *Известия Российской академии наук. Серия физическая.* 2015. Т. 79. № 12. С. 1709–1711. DOI: 10.7868/S0367676515120157
74. *Dombrovskaya, Zh.O.* Algorithm for Bianisotropic Metafilm Design Problem // 9th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (Metamaterials). Oxford, UK, 7–10 September, 2015. IEEE Xplore Digital Library. P. 58–60. DOI: 10.1109/MetaMaterials.2015.7342521

Поступила 23 сентября 2019 г.

MATHEMATICAL MODELING OF ELECTRODYNAMIC SYSTEMS BASED ON METAMATERIALS

A.N. BOGOLYUBOV, N.A. BOGOLYUBOV,
ZH.O. DOMBROVSKAYA, AND YU.V. MUKHARTOVA

doi: 10.25210/jfop-1903-07018

Intensive development of various fields of radio-electronic industry required development of fundamentally new materials that interact strongly with electromagnetic waves. Metamaterials are artificially structured composite materials capable of interacting with the electromagnetic field in a way as natural materials cannot.

The use of new materials provides undeniable advantages over traditional environments. Therefore, many applications require algorithms that allow a numerical experiment to be produced with high guaranteed accuracy. However, the use of most analytical methods is either severely complicated or becomes impossible for new media types. There is a need to apply numerical methods and computer simulations.

At the same time, a theoretical study by methods of mathematical physics of initial-boundary and boundary-value underlying the construction of the corresponding models is of great importance in modeling electrodynamic systems based on metamaterials. Such studies, of considerable self-interest, allow to choose the most optimal numerical methods for their solution, as well as to modify already existing methods or create new ones.

The application of the finite-difference method (FDM), the finite-difference time-domain method (FDTD) and the finite element method (FEM) to solving direct and inverse spectral and excitation problems for the calculation of waveguides with chiral filling are considered. Moreover, methods of mathematical modeling of metafilms are also considered.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 537.87, 51-73

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ЗЕРКАЛЬНОГО КОЛЛИМАТОРА СО СКРУГЛЁННЫМИ КРАЯМИ

© Авторы, 2019

doi: 10.25210/jfop-1903-019027

Боголюбов А. Н. — д.ф.-м.н., проф., физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. E-mail: bogan7@yandex.ru

Боголюбов Н. А. — к.ф.-м.н., м.н.с., физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. E-mail: russell67@yandex.ru

Коняев Д. А. — к.ф.-м.н., н.с., физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. E-mail: konyaev@physics.msu.ru

Хлебников Ф. Б. — ведущий программист, физический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. E-mail: mnfkhl@gmail.com

Шапкина Н. Е. — к.ф.-м.н., доцент. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: neshapkina@mail.ru

Аннотация

Применение коллиматоров позволяет проводить эксперименты по дифракции и рассеянию плоской электромагнитной волны на объектах сложной формы внутри безэховой камеры, лишенной практически всех недостатков открытых полигонов, существенно повышая при этом точность измерений и снижая их стоимость. Наиболее распространены зеркальные коллиматоры, выполненные в виде несимметричной вырезки параболоида вращения, в фокусе которого находится источник излучения.

В работе рассматривается задача синтеза оптимальной формы коллиматора со скругленными краями на примере модели протяженного цилиндрического зеркала с сечением в виде отрезка параболы, дополненного краевыми скруглениями и замыкающей дугой в теневой области. Основным методом решения прямой задачи дифракции на коллиматоре является метод интегральных уравнений. Полученные интегральные уравнения численно решаются при помощи метода Крылова-Боголюбова. Для минимизации функционала обратной задачи используется метод Нелдера-Мида.

Приведены результаты синтеза: поле в рабочей зоне двух зеркал с оптимизированными скруглениями, отличающихся фокусными расстояниями и амплитудами. Неоднородность полученного поля не превышает нескольких процентов, что свидетельствует об эффективности оптимизирующего алгоритма.

Ключевые слова: компактный полигон, обратная задача, задача синтеза

Введение

Для целого ряда практически важных экспериментов, относящихся к прикладной электродинамике, в частности измерения ЭПР исследуемого объекта, необходимо решить задачу получения плоской электромагнитной волны в заданном объеме пространства. Использование открытых полигонов для получения плоской волны осложняется наличием большого количества помех и влиянием погодных условий [1]. Этим недостаткам лишены компактные полигоны, представляющие собой измерительный стенд, состоящий из безэховой камеры и оборудования, физически моделирующего поле плоской волны.

Важнейшим элементом компактного полигона является коллиматор. В настоящий момент по всему миру применяется множество разнообразных коллиматоров, основанных на самых разных физических принципах, однако наиболее распространённым всё ещё остается однозеркальный коллиматор, представ-

Abstract

The use of collimators allows conducting experiments on diffraction and scattering of a plane electromagnetic wave by objects of complex shape inside an anechoic chamber, devoid of almost all the shortcomings of open polygons, while significantly increasing the accuracy of measurements and reducing their cost. The most common are mirror collimators made in the form of an asymmetric notch of a paraboloid of revolution, the focus of which is a radiation source.

In this work, we consider the problem of synthesizing the optimal shape of a collimator with rolled edges using the model of an extended cylindrical mirror with a section in the form of a parabola segment, supplemented by rolled edges and a trailing arc in the shadow region. The main method for solving the direct diffraction problem at the collimator is the method of integral equations. The obtained integral equations are numerically solved using the Krylov-Bogolyubov method. To minimize the functional of the inverse problem, the Nelder-Mead method is used.

The synthesis results are presented: the field in the quiet zone of two mirrors with optimized edges, differing in focal lengths and amplitudes. The inhomogeneity of the obtained field does not exceed several percent, which indicates the effectiveness of the optimizing algorithm.

Keywords: compact range, inverse problem, synthesis problem

ляющий собой несимметричный вырез металлического зеркала параболической формы. Такой коллиматор за счёт своих геометрических свойств способен преобразовывать сферическую волну точечного источника, расположенного в фокусе, в плоскую волну.

Область, в которой отражённое поле представляет собой плоскую волну с достаточной точностью, и в которой размещают исследуемый объект, называется рабочей зоной. Важнейшими характеристиками компактного полигона являются размер рабочей зоны, ограничивающий максимальный размер исследуемого тела, и неоднородность поля внутри неё, напрямую влияющая на точность измерений в ходе экспериментов на компактных полигонах.

Искажения в отраженное коллиматором поле вносит множество эффектов: среди них есть неточность юстировки коллиматора (обычно состоящего из набора отдельных отражающих пластин), погрешность, вносимая из-за рассеяния поля на оборудовании внутри безэховой камеры, переотраженные от стен безэховой камеры лучи, и ряд других факторов. Отдельно стоит выделить неустраняемый эффект дифракции на краях коллиматора, жёстко ограничивающий размеры рабочей зоны и одновременно влияющий на однородность поля внутри неё.

Существует несколько способов снижения влияния краевых эффектов. Обычно кромку рефлектора коллиматоров делают звездообразной или отгибают, чтобы уменьшить интенсивность дифрагированных лучей, приходящих в рабочую зону коллиматора, и перенаправить их мимо рабочей зоны [2]. Эти способы позволяют как уменьшить неоднородность поля в рабочей зоне, так и раздвинуть границы самой рабочей зоны, а поэтому применяются в наши дни практически повсеместно.

Преимуществом коллиматоров с зазубренными краями является их конструктивная простота: зазубрины на границах таких коллиматоров продолжают параболическую поверхность зеркала, такое зеркало проще изготовить и отъюстировать. В то же время побочным эффектом такого подхода является неизбежное увеличение длины кромки зеркала.

Зеркало с отогнутыми краями — более сложный объект с областями различной кривизны. Изготовление и даже проектирование такого коллиматора часто становится нетривиальной задачей. В то же время, коллиматоры с отогнутыми краями позволяют получить лучшие характеристики поля и размер рабочей зоны при том же размере безэховой камеры [3,4].

Существенным побочным эффектом использования коллиматоров со скругленными краями является появление интенсивных боковых лучей, распространяющихся в направлении, отличном от оси параболоида. В идеале такие лучи должны попадать не в рабочую зону коллиматора, а на стены безэховой камеры, но, несмотря на то, что стены безэховой камеры покрывают радиопоглощающим материалом, при некоторых условиях (например, при падении волны под скользящими углами) боковые лучи могут переотразиться в рабочую зону и существенно повлиять на структуру поля [5].

Постановка задачи

При проектировании зеркального коллиматора со скруглёнными краями неизбежно встаёт вопрос о параметрах скруглений. Скругления небольшого размера неэффективны, так как они не препятствуют дифракции. В то же время, использование слишком больших скруглений в компактном полигоне того же размера приведёт к уменьшению основного параболического участка зеркала, а следовательно, также приведёт к уменьшению рабочей зоны [6].

Для исследования вопроса выбора оптимальных размеров скруглений коллиматора, в настоящей работе ставится и решается обратная задача синтеза модельного протяжённого зеркала сложного сечения, состоящего из параболического участка, скруглений, гладко вплоть до вторых производных сопрягающихся с ним, а также выпуклой задней стенки (рис. 1). Для решения обратной задачи применяется методика А.С. Ильинского и А.Г. Свешникова, предполагающая многократное решение прямой задачи с направленно изменяемыми оптимизационными параметрами. Такой подход накладывает серьёзное требование на алгоритм построения формы зеркала: изменение оптимизационных параметров в достаточно широких пределах не должно влиять на гладкость фигуры или приводить к самопересечениям [7].

Направляющая зеркала строится следующим образом: в системе координат, ось x которой направлена вдоль оси зеркала, параболический участок зададим уравнением

$$x_{par} = \frac{y_{par}^2}{4F},$$

где F — заданное фокусное расстояние зеркала. Продолжить параболический участок непрерывным и гладким образом можно при помощи выпуклой дуги эллипса с заданными полуосями a и b . Однако полученная кривая не будет удовлетворять требованию непрерывности кривизны, поскольку даже знаки кривизны по разные стороны от точки сопряжения будут противоположными. Чтобы сгладить разрыв кри-

визны, введём сглаживающую функцию $B(\varphi)$, с помощью которой запишем выражения для скруглений, сопрягающихся с параболическим участком непрерывно с точностью до второй производной

$$x_{roll} = x_{par}(\varphi)(1 - B(\varphi)) + x_{ell}B(\varphi),$$

$$y_{roll} = y_{par}(\varphi)(1 - B(\varphi)) + y_{ell}B(\varphi).$$

Чтобы замкнуть направляющую в зоне тени, строится дуга эллипса

$$\frac{(\tilde{x}_s - x_0)^2}{a_s^2} + \frac{y_s^2}{b_s^2} = 1,$$

с центром в точке $(x_0, 0)$, полуоси a_s и b_s которого подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность направляющей в точке сопряжения.

Построенная вышеописанным способом фигура обладает достаточной гладкостью, однако при небольших размерах скруглений a и b она может стать самопересекающейся. Такое поведение недопустимо при решении обратной задачи, по этой причине задняя стенка направляющей дополняется функцией «шапочка», не нарушающей свойств гладкости фигуры, и окончательное выражение для x -координаты задней стенки принимает вид

$$x_s = \tilde{x}_s + (x_0 - b_s + \delta) \cdot \exp\left(\frac{1}{y_s^2 - 1} + 1\right).$$

Прямая задача

Прямая задача моделирования электромагнитного поля в рабочей зоне коллиматора ставится следующим образом: протяженное зеркало сложной формы облучается источником, представляющим собой нить тока, расположенную в фокусе коллиматора. На поверхности коллиматора ставятся импедансные граничные условия. Рабочая зона находится на двойном фокусном расстоянии от коллиматора, за источником. Задача дифракции ставится во внешней по отношению к зеркалу области, причём рассматривается только отражённое от коллиматора поле в рабочей зоне (рис. 1).

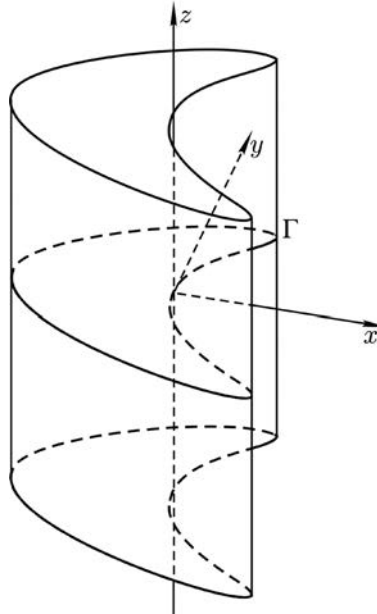


Рис. 1. Протяженное зеркало.

В такой постановке внешняя задача дифракции на импедансном зеркале может быть сведена к паре двумерных скалярных задач для уравнения Гельмгольца относительно составляющих E_z и H_z электрического и магнитного полей, параллельных направляющей зеркала, с граничными условиями третьего рода и условиями излучения на бесконечности. Обозначая за k волновое число, за ω — круговую частоту, а за W — импеданс зеркала, получим пару внешних по отношению к направляющей Γ зеркала задач:

$$\begin{cases} \Delta E_z + (k^2 - \gamma^2)E_z = 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial n} - i \frac{\omega \mu_0}{W} E_z = 0, \\ \frac{\partial(E_z - E_z^0)}{\partial r} - ik(E_z - E_z^0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta H_z + (k^2 - \gamma^2)H_z = 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} - i\omega\varepsilon_0 W H_z = 0, \\ \frac{\partial(H_z - H_z^0)}{\partial r} - ik(H_z - H_z^0) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right). \end{cases}$$

Каждая из этих задач сводится к интегральному уравнению Фредгольма. Задачи для E_z и H_z отличаются только коэффициентом в граничном условии, обозначив этот коэффициент как α , а неизвестную — как u , получим единую форму интегрального уравнения для обеих задач

$$\frac{1}{2}u(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(P)}{\partial n} - i\alpha g(M, P) \right) u(P) dl_p = u_0(M).$$

Полученное интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений при помощи метода Крылова-Боголюбова и решается численно, позволяя найти распределение токов, наведённых на зеркале, и отражённое поле в рабочей зоне [8].

Обратная задача

Отдельный интерес представляет задача выбора оптимальных геометрических размеров скругления. Так как построение формы скругления опирается на дугу эллипса, наиболее наглядными параметрами, характеризующими его геометрию, могут служить полуоси эллипса a и b , характеризующие ширину и толщину скруглений соответственно. Для любых наперед заданных значений полуосей мы, в соответствии с методикой, описанной ранее, можем построить поле в рабочей зоне коллиматора. Пусть в рабочей зоне введена сетка из N точек, и u_n , где $n = \overline{1..N}$ — рассчитанные значения поля в каждой из точек сетки. Среднеквадратичное отклонение поля, рассчитанного при заданных значениях a и b можно рассматривать как функционал этих величин

$$F(a, b) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n (u_n - u_0)^2},$$

где $u_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n$. Чем меньше значение этого функционала, тем меньше амплитуда поля в рабочей зоне будет отличаться от амплитуды поля плоской волны, а следовательно, задачу о поиске лучшей формы скругления можно свести к задаче минимизации функционала $F(a, b)$.

Метод Нелдера-Мида

Так как построенный функционал зависит только от двух параметров, эту задачу целесообразно решать при помощи метода Нелдера-Мида, который относится к классу симплекс-методов. Этот метод не требует вычисления градиента исследуемого функционала, поэтому он хорошо подходит для поиска экстремумов функционалов, не заданных аналитически, а вычисляемых численно. Метод Нелдера-Мида хорошо показывает себя при поиске минимумов функционалов, с небольшим количеством переменных, что делает его самым подходящим алгоритмом для решения поставленной обратной задачи.

Рассмотрим подробнее функционирование алгоритма Нелдера-Мида для случая двух переменных: сначала в пространстве параметров функционала вводится симплекс, в случае двух параметров — треугольный. Вершины симплекса соответствуют трём начальным приближениям, которые можно задать произвольно или, к примеру, выбрать при помощи стохастических методов. Дальнейшие шаги алгоритма одинаковы как для стартового симплекса, так и для видоизменённых симплексов, полученных в ходе работы алгоритма. На каждом шаге алгоритм конструирует новый симплекс, значения функционала в вершинах которого должны быть меньше, чем у предыдущего, после чего проверяет условие останова и переходит на следующий шаг. Таким образом, результатом работы каждой итерации алгоритма будет построение нового симплекса.

Итерация начинается с вычисления значений исследуемого функционала в каждой из вершин симплекса, если они не были рассчитаны ранее, после этого вершины сортируются по полученному значению функционала. Вершину с наименьшим значением функционала обозначим как P_l , с наибольшим — как P_h , а третьей вершине присвоим обозначение P_g . Далее найдём середину «легкого» ребра симплекса, соединяющего вершины P_l и P_g и, обозначив её как \bar{P} , произведём первую операцию, отражение симплекса (рис. 2(1))

$$P^* = (1 + \alpha)\bar{P} - \alpha P_h.$$

Здесь число α — это положительная константа, называемая коэффициентом отражения. Часто её берут равной единице, в этом случае точка P^* будет симметричной P_h относительно середины «легкого» ребра.

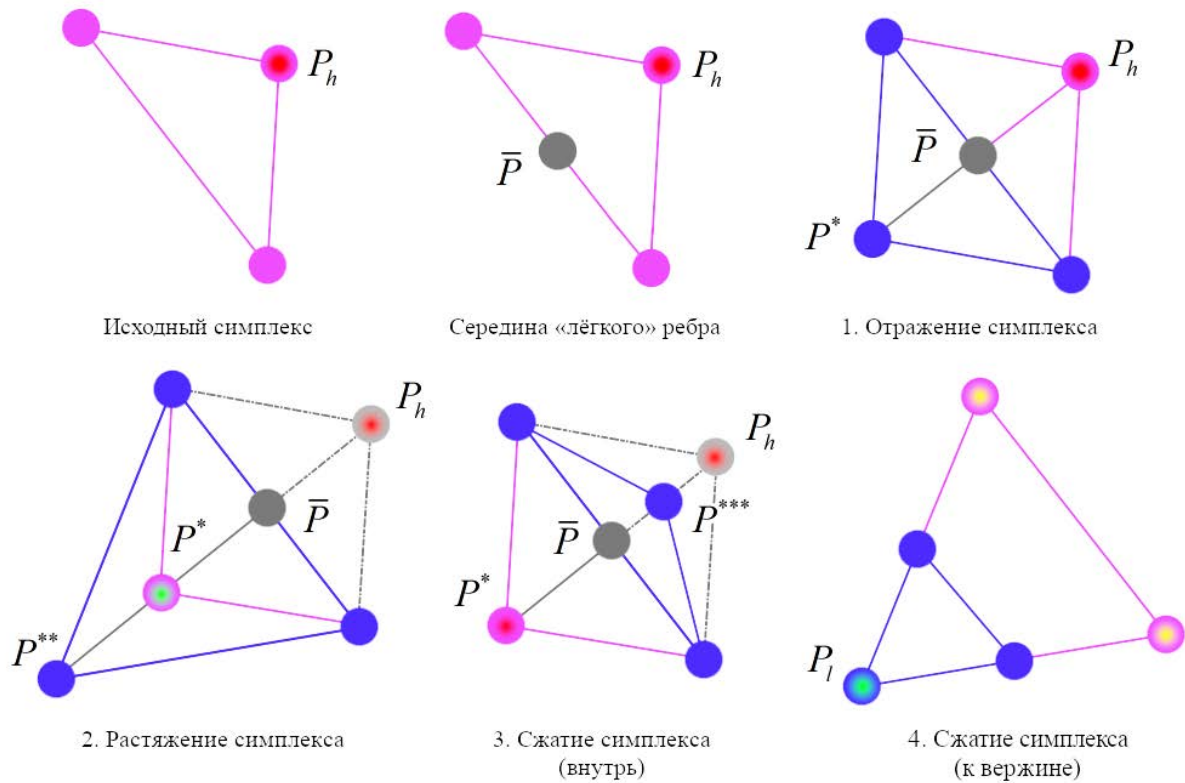


Рис. 2. Алгоритм Нелдера-Мида. Синим обозначен новый симплекс.

В случае если $F(P_l) < F(P^*) < F(P_g)$ точка P^* берётся в качестве новой вершины симплекса (заменяя собой самую «тяжелую» точку P_h), и алгоритм переходит на следующий шаг.

В случае если P^* оказывается новым минимумом ($F(P^*) < F(P_l)$), производится процедура растяжения симплекса (рис. 2(2))

$$P^{**} = \gamma P^* + (1 - \gamma) \bar{P},$$

в результате которой получается новая точка P^{**} . Константа γ называется коэффициентом растяжения, её часто берут равной 2.

Если значение функционала в точке P^{**} меньше, чем в P_l , самой «легкой» из точек исходного симплекса, новой вершиной симплекса становится P^{**} , которая заменяет P_h . Однако в противном случае ($F(P^{**}) > F(P_l)$) растяжение считается неудачным, и в новый симплекс добавляется «отражённая» точка P^* . Таким образом, в случае удачного отражения и растяжения на следующую итерацию переходит симплекс из точек P_l , P_g и P^* либо P^{**} .

Наконец неразобранным оказался последний случай, когда значение функционала в «отражённой» точке P^* превышает значения во всех остальных точках, за исключением, быть может, P_h . В этом случае нецелесообразно переходить к симплексу $\{P_l, P_g, P^*\}$, так как после повторного отражения алгоритм снова вернётся в точку P_h (или в близкую к ней, если $\alpha \neq 1$), и алгоритм заикнется. Чтобы избежать этого, применяют процедуру сжатия симплекса, рассматривая точку

$$P^{***} = \beta P_h + (1 - \beta) \bar{P}$$

внутри симплекса (рис. 2(3)). В качестве коэффициента сжатия β берётся число из интервала (0; 1), обычно выбирается значение 0.5.

Точка P^{***} становится новой точкой симплекса вместо P_h , и алгоритм переходит на новую итерацию, за исключением тех редких случаев, когда $P^{***} > \min(P_h, P^*)$, и из построенных нами ранее точек ни одна не подходит на роль новой вершины симплекса, и требуется провести сжатие симплекса к «легкой» вершине P_l (рис. 2(4)). Эта процедура требует пересчёта функционала сразу в двух новых точках, поэтому она менее выгодна при численном счёте по сравнению с отражением и растяжением. На практике, впрочем, она выполняется достаточно редко, поскольку для её выполнения значения функционала по обе стороны от «легкого» ребра в точках P^* и P^{***} должны быть велики.

Проверку условия останова разумно производить в конце итерации, вне зависимости от того, каким образом был построен новый симплекс. Алгоритм допускает достаточно широкий спектр таких условий, к примеру, счёт на установление, пороговое значение функционала в вершинах симплекса, как в настоящей работе, или даже минимальную площадь симплекса в пространстве параметров, которую легко посчитать, зная координаты вершин [9].

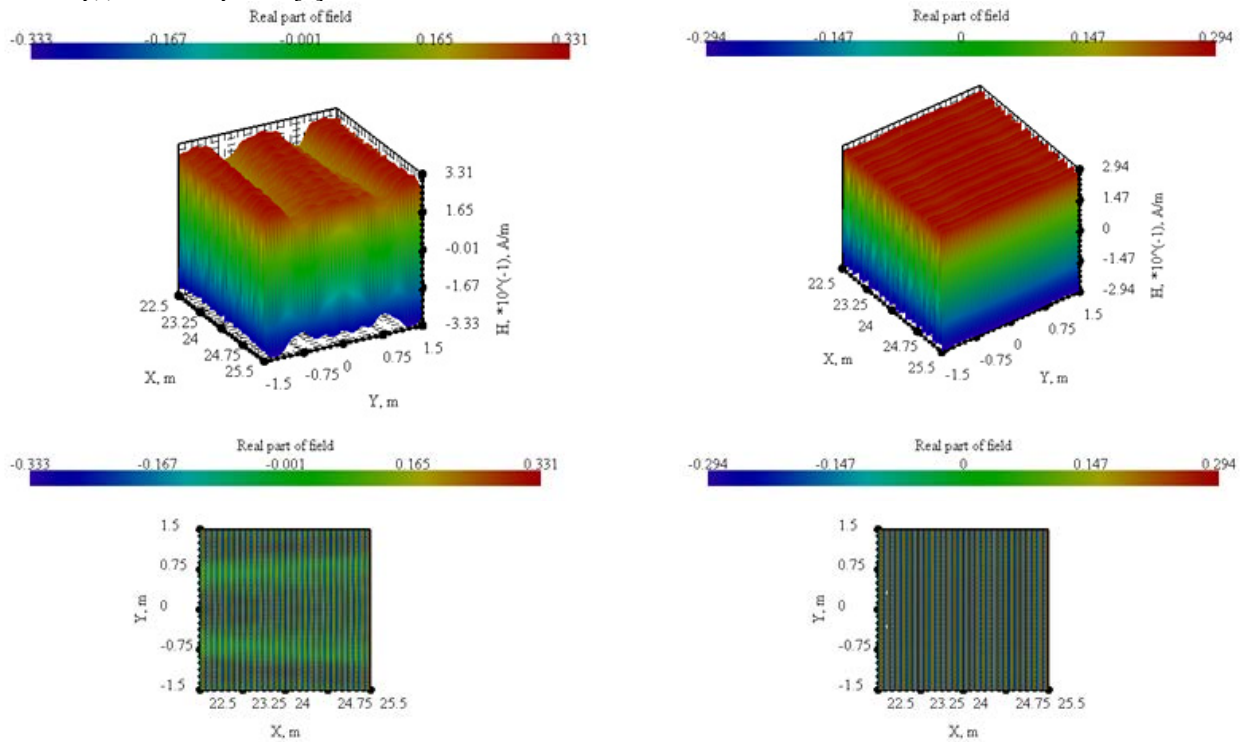


Рис. 3. Действительная часть поля в рабочей зоне коллиматора апертурой 12 м, начальное приближение и оптимизированное зеркало.

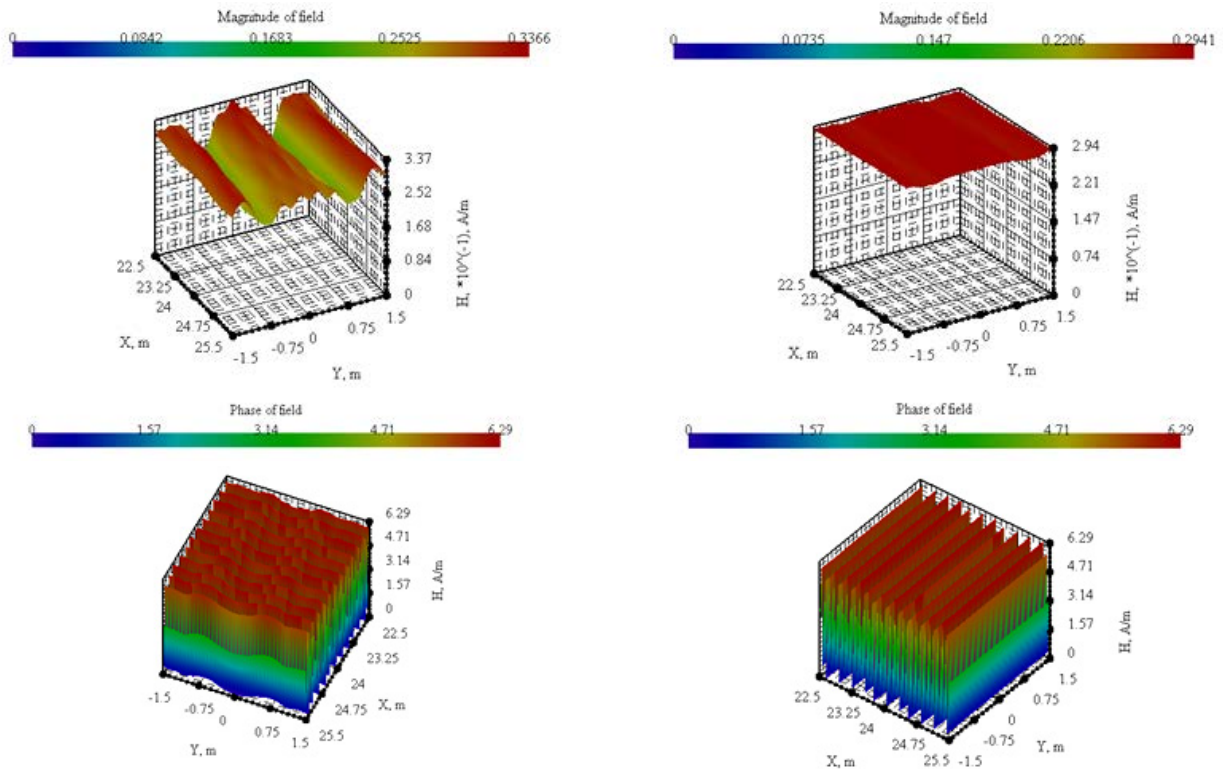


Рис. 4. Амплитуда и фаза поля в рабочей зоне коллиматора апертурой 12 м, начальное приближение и оптимизированное зеркало.

Результаты расчётов

На основе описанного алгоритма был реализован вычислительный комплекс, предназначенный для решения прямой и обратной задачи расчёта поля в рабочей зоне. Были проведены две серии расчётов по оптимизации формы зеркал, параметры которых соответствовали геометрическим характеристикам коллиматоров МАК-5 и МАК-12 ИТПЭ РАН с апертурой 5 и 12 метров.

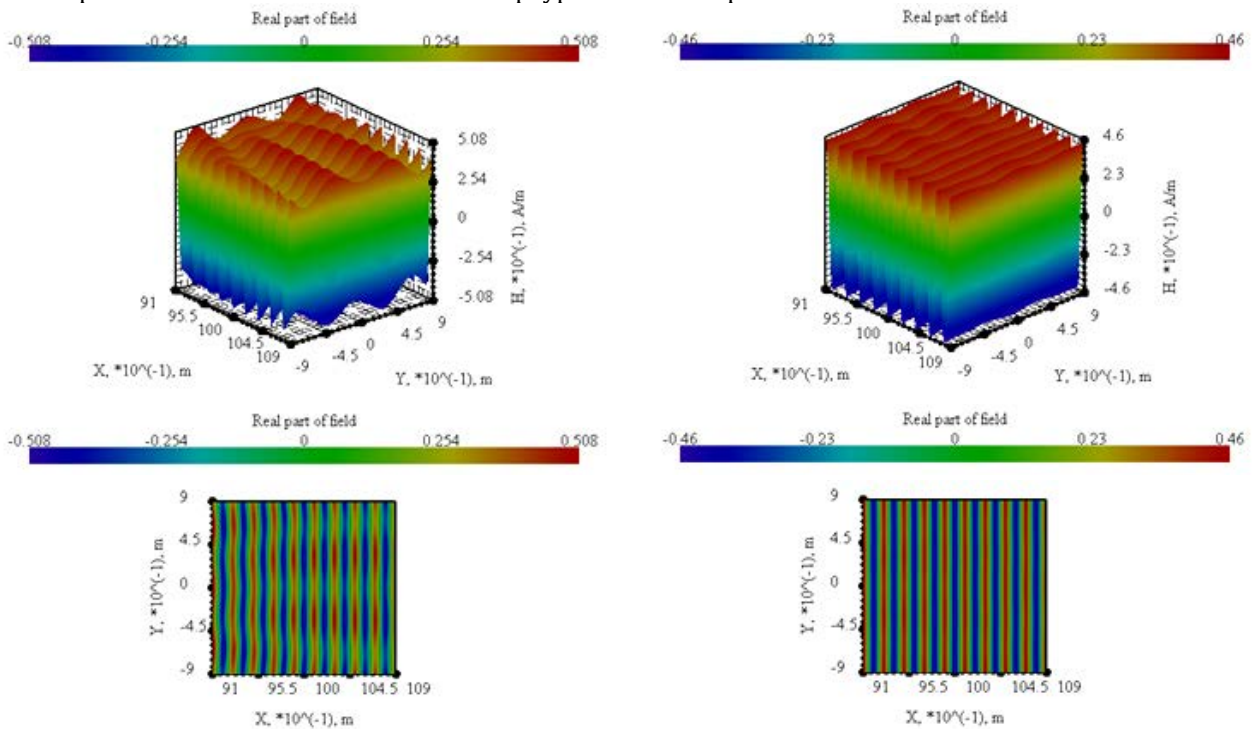


Рис. 5. Действительная часть поля в рабочей зоне коллиматора апертурой 5 м, начальное приближение и оптимизированное зеркало.

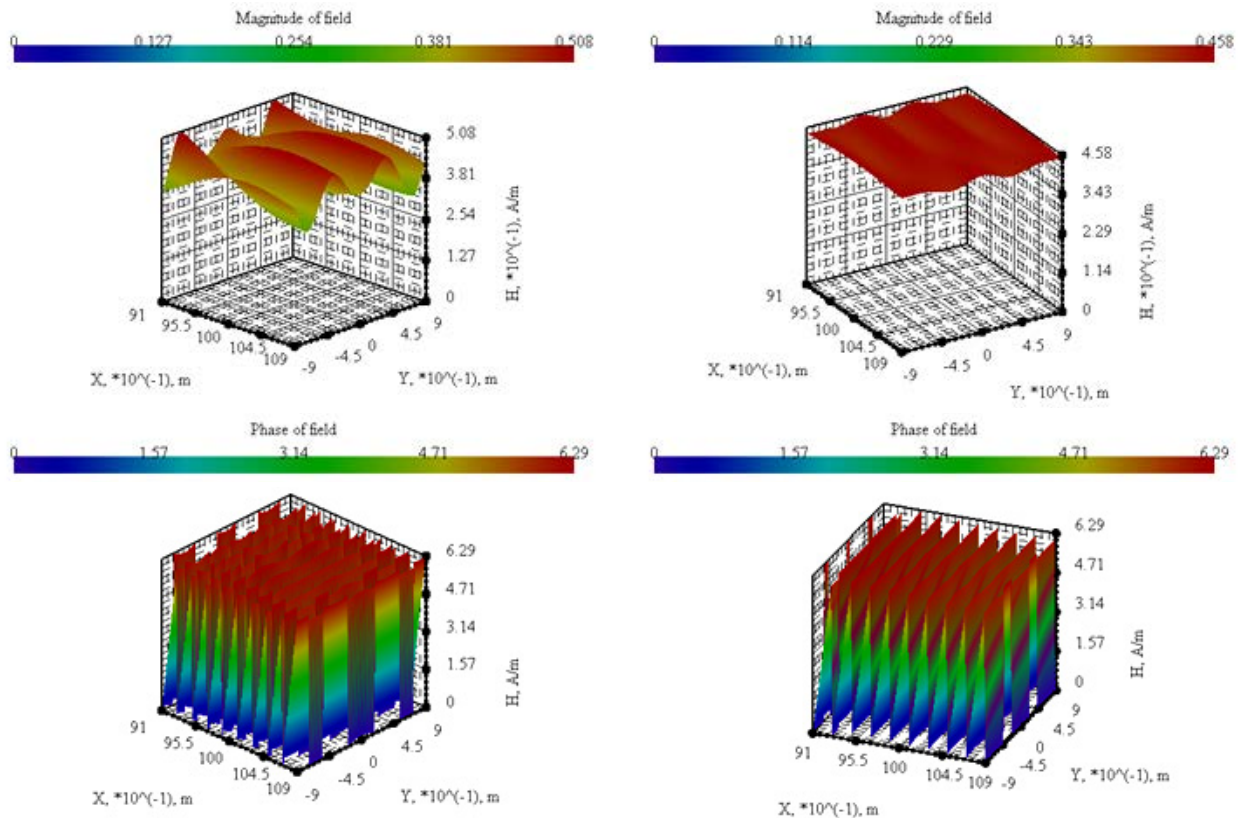


Рис. 6. Амплитуда и фаза поля в рабочей зоне коллиматора апертурой 5 м, начальное приближение и оптимизированное зеркало.

Для коллиматора МАК-12 фокусное расстояние составляет 12 м, рабочая зона расположена на двойном фокусном расстоянии от зеркала. Случайным образом были построены три начальных приближения, задающие исходный симплекс. В результате работы алгоритма были получены параметры оптимизированного зеркала, создающего в рабочей зоне электромагнитное поле, очень близкое по своим характеристикам к полю плоской электромагнитной волны (рис. 3). По сравнению с начальными приближениями, поле построенного зеркала имеет гораздо более равномерную амплитуду, и более равномерную фазу (рис. 4), неравномерности этих величин не превышают нескольких процентов.

Аналогичным образом была проведена оптимизация коллиматора с апертурой 5 м. Как и в предыдущем случае, в результате оптимизации был построен коллиматор, позволяющий получить в рабочей зоне электромагнитное поле с очень хорошими характеристиками (рис. 5, 6).

Заключение

В настоящей работе была поставлена задача оптимизации поля зеркального коллиматора со скругленными краями. Были построены примеры зеркал с оптимизированной формой скруглений, которые позволяют получить в рабочей зоне электромагнитное поле, с очень высокой степенью точности совпадающее с полем плоской электромагнитной волны. Построенный алгоритм можно обобщить на целый спектр задач, связанных с оптимизацией коллиматора, внося поправки в функционал или используя другой набор варьируемых величин.

Полученные в результате работы алгоритма оптимизированные протяженные коллиматоры позволяют получить в рабочей зоне поле очень высокой однородности как по амплитуде, так и по фазе, отклонение амплитуды такого поля составляет не более нескольких процентов на выбранной частоте излучения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18–31–00358).

Список литературы

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. // Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007. ISBN: 978-5-02-032738-2
2. Gupta, I., Ericson, K., and Burnside, W. A method to design blended rolled edges for compact range reflectors // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1990. Vol. 38. No. 6.
3. Lee, T., Burnside, W. Performance trade-off between serrated edge and blended edge compact range reflectors // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1996. Vol. 44. No. 1
4. Burgos, S. et al. Performance comparison between serrated edge and rolled edge reflectors inside CATR facilities // Antennas and Propagation (EUCAP), Proceedings of the 5th European Conference on. IEEE. 2011. P. 3586-3590.
5. Никитенко А.В., Зубов А.С., Шапкина Н.Е. Моделирование электромагнитного рассеяния на радиопоглощающем материале методом связанных волн. // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 18–32.
6. Хлебников Ф.Б., Боголюбов А.Н., Солосин В.С., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование рассеянного поля в рабочей зоне зеркального коллиматора // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2015. № 6. С. 43–48.
7. Хлебников Ф.Б., Боголюбов А.Н., Коняев Д.А., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование электромагнитного поля в рабочей зоне компактного полигона. // Физические основы приборостроения. 2018. № 2. С. 54–60.
8. Хлебников Ф.Б., Коняев Д.А., Боголюбов А.Н., Шапкина Н.Е. Решение задачи синтеза зеркального коллиматора со скругленными краями методами математического моделирования // 11-я Международная научно-практическая конференция «Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации». Суздаль. 2018. С. 33–35.
9. Nelder, J.A., Mead, R. A simplex method for function minimization // The computer journal. 1965. Vol. 7. No. 4. P. 308-313.

Поступила 5 сентября 2019 г.

Уважаемые читатели!

Подписка на журнал оформляется через подписное агентство «Книга-Сервис» и объединенный каталог «Пресса России» (подписной индекс **29196**)

Журнал включен:

- В *Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)*.
- В базу данных *Russian Science Citation Index (RSCI)* на платформе *Web of Science*.
- В *Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук*.

OPTIMIZING THE SHAPE OF A MIRROR COLLIMATOR WITH ROUNDED EDGES

A.N. BOGOLYUBOV, N.A. BOGOLYUBOV, D.A. KONYAEVA,
F.B. KHLEBNIKOV, AND N.E. SHAPKINA

doi: 10.25210/jfop-1903-019027

For numerous practically important experiments related to applied electrodynamics, the EPR measurements of a studied object in particular, it is necessary to solve the problem of obtaining a plane electromagnetic wave in a given volume of space. To obtain a plane wave usage of open ranges is complicated because of a large amount of interference and the influence of weather conditions. Special measuring stands, consisting of an anechoic chamber and equipment physically simulating a plane wave field, called compact ranges, lack most of these shortcomings.

The most important element of a compact polygon is a collimator, which is able to convert a spherical wave of a point source located in focus into a plane wave due to its properties. The distortion in the field reflected by the collimator is accumulated by many effects. In this paper we consider the diffraction effect at the edges of the collimator, which strictly limits the size of the quiet zone and at the same time affects the uniformity of the field inside it. There are several ways to reduce the edge effects. Usually modifications of collimator edges are applied. A significant disadvantage of collimators with rounded edges is the appearance of intense lateral.

To study the question of choosing the optimal sizes of the collimator edges, the present paper poses and solves the inverse problem of synthesizing a model extended mirror with a complex cross section, consisting of a parabolic section, rolled edges, smoothly up to the second derivatives conjugating with it, as well as a convex rear wall. To solve the inverse problem, the method of A.S. Ilyinsky and A.G. Sveshnikov, involving multiple solutions to a direct problem with directionally variable optimization parameters is applied.

Since the construction of the edges shape is based on the ellipse arc, the most obvious parameters characterizing its geometry are the semi-axis of the ellipse a and b , which characterize the width and thickness of the edges, respectively. For any given values of the semi-axis, we, in accordance with the procedure described earlier, can calculate a field in the quiet zone of the collimator. The standard deviation of the field from its average value, calculated for given values of a and b , can be considered as a functional of these quantities. The minimum of this functional will correspond to the smoothest field distribution; therefore, the problem of optimizing the shape of the mirror can be considered as the problem of finding the minimum of this functional. Since the constructed functional depends only on two parameters, it is advisable to solve this problem using the Nelder-Mead method, which belongs to the class of simplex methods. This method does not require calculating the gradient of the studied functional, therefore, it is well suited for finding extrema of functionals that are not specified analytically, but are calculated numerically. The Nelder-Mead method performs well when searching for minima of functionals with a small number of variables, which makes it the most suitable algorithm for solving the inverse problem.

Based on the described algorithm, a program complex designed to solve both the direct and inverse problems of calculating the field in the working area was implemented. Two series of calculations were performed to optimize the shape of the mirrors, the parameters of which corresponded to the geometric characteristics of the MAK-5 and MAK-12 collimators of ITAE RAS with an aperture of 5 and 12 meters. As a result of the calculations, the parameters of the optimized mirror were obtained, which creates an electromagnetic field in the target zone that is very close in its characteristics to the field of a plane electromagnetic wave. Compared to the initial approximations, the field of the constructed mirror has much more uniform amplitude, and a more uniform phase, the irregularities of these values do not exceed several percent.

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6:517.9

КРАТНОМАСШТАБНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ НА ОСНОВЕ НОВЫХ ЧАСТОТНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВЕЙВЛЕТОВ КРАВЧЕНКО

© Авторы, 2019

doi: 10.25210/jfop-1903-028083

Кравченко В. Ф. — заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., гл.н.с., Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН; Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН; профессор кафедры высшей математики ФН-1, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва. E-mail: kvf-ok@mail.ru

Пустовойт В. И. — академик РАН, д.ф.-м.н., проф., научный руководитель, Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва. E-mail: vladpustovoi@gmail.com

Юрин А. В. — Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. E-mail: yualex@rambler.ru

Аннотация

Предложено и обосновано использование ортогональных вейвлетов Кравченко при кратномасштабной аппроксимации решения интегрального уравнения типа свертки. Для этого построена новая биортогональная система вейвлет-базисов, ориентированных на восстановление полезного сигнала. Новые вейвлет-базисы получают посредством модификации ортогональных вейвлетов с финитным спектром функцией, стабилизирующей решение задачи. Проведено исследование свойств новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов и построены цифровые фильтры реализующие быстрые вычислительные алгоритмы. Предложены схемы кратномасштабного анализа, позволяющие при выполнении операций ДВП и ОДВП сразу решать задачи по восстановлению полезного сигнала, а также по эффективному подавлению шума. Это позволяет значительно ускорить вычислительный процесс.

Ключевые слова: атомарные функции, вейвлеты, интегральные уравнения, обратная свертка, регуляризация

Abstract

The application of orthogonal Kravchenko wavelets for multiresolution approximation of deconvolution integral equation solution is proposed and substantiated. A new biorthogonal system of basis wavelets oriented towards the restoration of a useful signal is developed. The new basis-wavelets are received with the help of modification of the orthogonal wavelets with finite spectrum by the function stabilizing the problem solution. The research of property of the new biorthogonal frequency-modified wavelets and the construction of the digital filters for realizing fast computing algorithms are presented. The scheme of multiresolution analysis, allowing to solve problems of restoration of a useful signal and effective noise reduction at performance of operations DWT and IDWT, are observed. All these factors considerably allow to speed up the computing process.

Keywords: atomic functions, wavelets, integral equations, deconvolution, regularization

Введение

Во многих приложениях требуется найти решение интегрального уравнения типа свертки [1–7]

$$\int \lambda(t - \tau)x(\tau)d\tau = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in L_2(\mathbb{R}), \quad \lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}), \quad x(t) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (1.1)$$

Оператор свертки \mathcal{L} определяется в виде

$$\mathcal{L}: x(t) \rightarrow \int \lambda(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

С точки зрения практического применения наиболее интересна следующая постановка задачи: выполнить оценку полезного сигнала $x(t)$ первоначально искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$ линейной стационарной системы \mathcal{L} с последующим действием шума $n(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}x(t) + n(t) = (\lambda * x)(t) + n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

где $n(t)$ предполагается аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с дисперсией σ^2 . АБГШ в качестве модели хорошо подходит для математического описания многих природных процессов.

Самый простой способ оценки сигнала \tilde{x} можно получить с помощью обратного оператора \mathcal{L}^{-1} следующим образом:

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} y(t) = x(t) + \mathcal{L}^{-1} n(t). \quad (1.3)$$

Тогда, согласно теореме о свертке [2-9], решение уравнения

$$\hat{y}(\omega) = \hat{\lambda}(\omega)\hat{x}(\omega) + \hat{n}(\omega), \quad (1.4)$$

ищется методом инверсной фильтрации

$$\hat{\tilde{x}}(\omega) = \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)} = \hat{x}(\omega) + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)}, \quad (1.5)$$

где $\hat{y}(\omega) = \int y(t)e^{i\omega t} dt$ — преобразование Фурье (ПФ) правой части уравнения, $\hat{\lambda}(\omega) = \int \lambda(t)e^{i\omega t} dt$ — ПФ ядра уравнения, $\hat{\tilde{x}}(\omega) = \int \tilde{x}(t)e^{i\omega t} dt$ — ПФ оценки полезного сигнала.

Однако решение методом инверсной фильтрации неустойчивое и сингулярное, более того задача (1.1) является некорректной. Записывая решение (1.1) даже с помощью псевдоинверсного представления

$$\hat{\tilde{x}}(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{y}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)}, & |\hat{\lambda}(\omega)| > 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{или} \quad \hat{\tilde{x}}(\omega) = \begin{cases} \hat{x}(\omega) + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)}, & |\hat{\lambda}(\omega)| > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Очевидно, что при $|\hat{\lambda}(\omega)| \approx 0$ происходит существенное усиление шума.

Для устранения неустойчивости и сингулярностей решения (1.1) существуют различные модификации методов решения [1-7]. На основе преобразования Фурье наиболее широкое распространение получили методы ПФ с регуляризацией Тихонова, метод фильтрации Винера, которые используют регуляризующий компонент $R(\omega)$. Ослабление усиленного шума $\hat{n}(\omega)/\hat{\lambda}(\omega)$ выполняется с помощью фильтра с частотной характеристикой [2-7]

$$\hat{K}(\omega) = \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)}. \quad (1.7)$$

Заметим, что при $R \rightarrow 0$ спектр $\hat{K}(\omega)$ переходит в выражение для инверсной или псевдоинверсной фильтрации. Задача становится некорректной, а решение неустойчивым.

Для ПФ оценки полезного сигнала x_p имеет место следующее соотношение

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)\hat{K}(\omega) = \hat{x}(\omega) \frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} + \frac{\hat{n}(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)} \left(\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right) = \hat{x}_p(\omega) + \frac{\hat{n}_p(\omega)}{\hat{\lambda}(\omega)}. \quad (1.8)$$

Здесь \hat{x}_p и $\hat{n}_p/\hat{\lambda}$ — слагаемые спектра решения $\hat{\tilde{x}}_p$, соответственно, ПФ очищенного сигнала x_p и прошедшего шума $\mathcal{L}^{-1}n_p$, входящие в состав оценки полезного сигнала \tilde{x}_p .

Как правило, операции (1.6) и (1.8) позволяют избежать неустойчивости численного решения. Отличие метода ПФ с регуляризацией Тихонова, а также метода фильтрации Винера состоит в выборе регуляризующей компоненты $R(\omega)$. В методе ПФ с регуляризацией Тихонова $R(\omega)$ стабилизирующий множитель записывается в виде

$$\hat{K}(\omega) = \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + \alpha|\omega|^{2p}},$$

а регуляризованный спектр решения

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}\hat{y}(\omega)}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + \alpha|\omega|^{2p}}, \quad (1.9)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации; $p \geq 0$ — порядок регуляризации, который обычно выбирается $p = 1, 2, 3, \dots$, но может быть и нецелым.

В методе фильтрации Винера спектр решения интегрального уравнения типа свертки имеет вид

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}\hat{y}(\omega)}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + S_n(\omega)/S_x(\omega)}, \quad (1.10)$$

где $S_n(\omega)$ и $S_x(\omega)$ — спектральная мощность шума $n(t)$ и искомого решения $x(t)$ (усреднение по ансамблю

реализаций мощностных или энергетических спектров шума и решения). В представленном виде этот метод называется оптимальной фильтрацией Винера. Однако в таком виде данный метод практически нереализуем, так как $S_n(\omega)$ и особенно $S_x(\omega)$, как правило, неизвестны. Если использовать лишь одну реализацию энергетических спектров шума $|\hat{n}(\omega)|^2$ и решения $|\hat{x}(\omega)|^2$, то

$$S_n(\omega) / S_x(\omega) = |\hat{n}(\omega)|^2 / |\hat{x}(\omega)|^2.$$

Такой вариант метода называется винеровской фильтрацией. Если спектр шума $\hat{n}(\omega)$ можно иногда определить, то спектр решения $\hat{x}(\omega)$ известен только лишь для модельных примеров, а для обработки реальных искаженных сигналов обычно не известен. В этом случае ПФ решения часто записывают в виде

$$\hat{x}_p(\omega) = \frac{\hat{\lambda}(\omega)\hat{y}(\omega)}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + C}, \quad (1.11)$$

где $C \geq 0$ — некоторая константа (параметр). Такое решение называется параметрической винеровской фильтрацией.

Отличительной особенностью использования ПФ для решения (1.1) является компактное представление шума $\mathcal{L}^{-1}n$, потому что ПФ действует как разложение Карунена-Лозва [10–12] и декоррелирует шум $\mathcal{L}^{-1}n$. Поэтому среди всех линейных преобразований при ПФ основная энергия шума $\mathcal{L}^{-1}n$ концентрируется в минимально возможном числе коэффициентов. Наилучших результатов в решении интегрального уравнения типа свертки методами ПФ удается достичь, когда неискаженный сигнал $x(t)$ равномерно гладкий и эффективно аппроксимируется базисом Фурье.

Однако базис Фурье хорошо выделяет частоты, но не даёт информации о резких и коротких всплесках, перепадах, точках разрыва, изолированных особенностях и вообще о локальном поведении функции, так как базис $\exp(j\omega t)$ покрывает всю вещественную прямую, а ПФ функции $\hat{x}(\omega)$ зависит от значений $x(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ [13–23]. В лучшем случае локальная особенность будет иметь очень широкий спектр, а энергия сигнала сосредоточена в значительном числе коэффициентов Фурье. Ошибка оценки полезного сигнала $x(t)$ сконцентрирована в окрестности особых точек (явно выражается в «звоне» около особых точек). В таком случае, для компактного представления сигнала $x(t)$, имеющего указанные особенности, желательно, чтобы элементы базиса были, как можно лучше локализованы по времени и частоте. Вейвлетные базисы удовлетворяют такому требованию. Кроме этого, накладываются и дополнительные условия, такие как ортогональность базиса, компактность носителей вейвлетов и т.д. В дальнейшем, выполняя пороговую обработку коэффициентов разложения в подходящем базисе вейвлетов согласно [13,14,24] можно добиться почти оптимальной оценки полезного сигнала $x(t)$.

Применение вейвлет-преобразования (ВП) предполагает выбор вейвлет-базиса из некоторой библиотеки, опираясь на заданные свойства функции-прародителя вейвлетов. Так как решение интегрального уравнения типа свертки реализуется в спектральной области то необходимо выбирать вейвлет-базис, который имеет компактный носитель в частотной области, достаточно быстрое убывание и небольшое число коэффициентов вейвлет-фильтров. Оптимальным с этой точки зрения являются вейвлеты Кравченко [25–28], которые имеют лучшие характеристики по сравнению с известными системами вейвлетов с финитным спектром (вейвлеты Мейера, Котельникова-Шеннона). Так же могут быть использованы вейвлеты финитные во временной области (например, вейвлеты Добеши), имеющие хорошую крутизну фронтов в частотной области. Возникающая при этом систематическая погрешность должна оцениваться для каждого конкретного случая.

Таким образом, Фурье- и вейвлет-базисы обладают рядом преимуществ в представлении и обработке функций. Эти преимущества можно использовать для создания комбинированного подхода к решению интегрального уравнения типа свертки (1.1), которые должны состоять из отдельных блоков [29]: быстрое преобразование Фурье (БПФ), деконволюции, обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ), дискретное вейвлет-преобразование (ДВП), пороговая обработка коэффициентов, обратное дискретное вейвлет-преобразование (ОДВП). Это неизбежно приводит к дополнительным аппаратным и временным затратам. Для обеспечения максимальной эффективности при минимальных затратах вычислительных ресурсов необходимо объединить в одном вейвлетном преобразовании решения нескольких задач обработки. Это делается в рамках ДВП, при помощи модификации выбранной ортогональной системы вейвлетов Кравченко [25–28]. При этом модифицированные вейвлеты Кравченко должны отвечать всем требованиям теории кратномасштабного анализа (КМА), чтобы можно было построить блоки фильтров быстрых вейвлетных преобразований. Такая модификация порождает нестационарный КМА на основе семейства биортогональных вейвлет-базисов Кравченко.

2. Ортогональные вейвлеты Кравченко

Математический аппарат вейвлетов получил широкое распространение во многих приложениях. Благодаря локальным свойствам, как в пространственной, так и в частотной области, ортогональности, нулевым моментам и КМА, вычислительные алгоритмы на основе вейвлетов обладают существенными преимуществами перед Фурье-преобразованиями [13,14,21]. В теории вейвлетов имеет место сближение различных математических аппаратов аппроксимации. С этой точки зрения большой научный и практический интерес представляют ортогональные вейвлеты Кравченко [25–28] на основе атомарных функций (АФ), которые являются удобным математическим аппаратом в широком классе задач численного анализа [25–28, 30–35].

Атомарные функции представляют собой финитные бесконечно дифференцируемые функции, являющиеся решениями дифференциальных уравнений со смещенным аргументом

$$Lf(x) = \lambda \sum_{k=1}^M f(ax - b(k)), |a| > 1, \quad (2.1)$$

где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами; a, b — некоторые постоянные.

Среди АФ аппроксимационные свойства функций $\text{up}(x)$, $\text{fir}_N(x)$ наиболее хорошо изучены [25, 30–32].

Функция $\text{up}(x)$. Функция $\text{up}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f'(x) = 2f(2x + 1) - 2f(2x - 1). \quad (2.2)$$

Она может быть представлена в виде (рис. 2.1)

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\text{up}}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega, \quad (2.3)$$

где $\widehat{\text{up}}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega 2^{-k})}{\omega 2^{-k}}$ — преобразование Фурье функции $\text{up}(x)$.

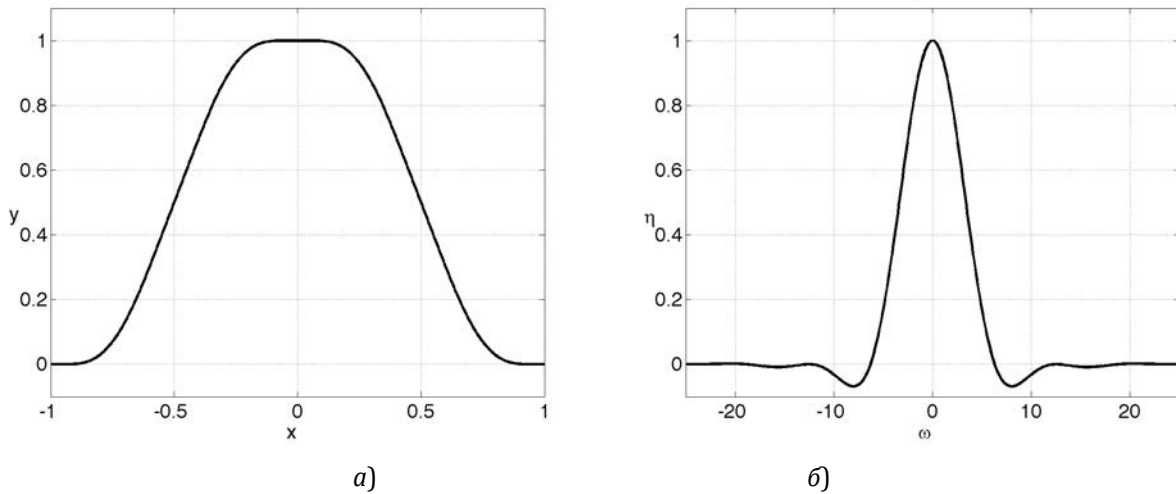


Рис. 2.1. График функции $\text{up}(x)$ (а) и её спектра $\widehat{\text{up}}(\omega)$ (б).

Функция $\text{up}(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\text{supp up}(x) = [-1, 1]$.
2. $\text{up}(x) \in C^\infty[-1, 1]$.
3. Функция $\text{up}(x)$ является четной

$$\text{up}(x) = \text{up}(-x), \quad \text{up}(x) = 1 - \text{up}(1 - x). \quad (2.4)$$

4. Максимум $\text{up}(0) = 1$. Функция охватывает единичную площадь

$$\int_{-1}^1 \text{up}(x) dx = 1. \quad (2.5)$$

5. Сдвиги $\text{up}(x)$ образуют $\text{const}=1$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{up}(x - k) \equiv 1. \quad (2.6)$$

При сдвигах на более короткий шаг можно получить полином любой степени

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k) \text{up}(x - k 2^{-N}) \equiv x^N. \quad (2.7)$$

6. Функция $\text{up}(x)$ ни в одной точке своего носителя неаналитична: соответствующий ряд Тейлора имеет либо нулевой радиус сходимости, либо сходится к другой функции. Поэтому для представления $\text{up}(x)$ невозможно использовать степенные ряды. Однако при периодическом продолжении с периодом 2π функция $\text{up}(x)$ имеет быстро сходящееся разложение в ряд Фурье по нечетным гармоникам

$$\text{up}(x) = 0,5 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\text{up}}(\pi k) \cos[\pi(2k-1)x]. \quad (2.8)$$

Функции $\text{fup}_N(x)$. АФ $\text{fup}_N(x)$ получается из свертки финитного сплайна N -го порядка $\Theta_N(x)$ и функции $\text{up}(x)$

$$\text{fup}_N(x) = \Theta_N * \text{up}(2x) = \Theta_{N-1} * \text{up}(x), \quad (2.9)$$

причем $\text{fup}_0(x) \equiv \text{up}(x)$.

С помощью интеграла Фурье $\text{fup}_N(x)$ определяется так

$$\text{fup}_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\text{fup}_N}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega, \quad (2.10)$$

где ее преобразование Фурье

$$\widehat{\text{fup}_N}(\omega) = \left[\frac{\sin(z/2^{N+1})}{z/2^{N+1}} \right]^{N+1} \prod_{k=N+2}^{\infty} \frac{\sin(z/2^k)}{z/2^k}.$$

Функции $\text{fup}_N(x)$ являются дробными компонентами функции $\text{up}(x)$ [30]. Это означает, что функция $\text{up}(x)$ может быть разложена в свертку конечной длины из функций $\text{fup}_N(x)$ для любого произвольного N . Данное свойство позволяет гибко применять их при вычислениях. Для задач интерполяции основное значение имеют функции $\text{fup}_N(x)$. Функция $\text{up}(x)$ является базовой, обеспечивая наибольшую гладкость при интерполяции. Рассмотрим основные свойства функций $\text{fup}_N(x)$:

1. $\text{supp fup}_N(x) = [-(N+2)/2, (N+2)/2]$.

2. $\text{fup}_N(x) \in C^\infty [-(N+2)/2, (N+2)/2]$.

3. Функции $\text{fup}_N(x)$ для каждого N четная

$$\text{fup}_N(x) = \text{fup}_N(-x). \quad (2.11)$$

4. Охватывает единичную площадь

$$\int_{-(N+2)/2}^{(N+2)/2} \text{fup}_N(x) dx = 1. \quad (2.12)$$

5. Производная функции $\text{fup}_N(x)$ выражается через $\text{fup}_{N-1}(x)$

$$\text{fup}'_N(x) = \text{fup}_{N-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \text{fup}_{N-1}\left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (2.13)$$

6. Сдвиги $\text{up}(x)$ образуют $\text{const}=1$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{fup}_N(x - k) \equiv 1. \quad (2.14)$$

7. На интервале $[N/2; N/2 + 1]$ функции $\text{fup}_N(x)$ с точностью до коэффициента совпадают с участком сдвинутой функции $\text{up}(x)$

$$\text{fup}_N(x) = 2^{c_N^2} \text{up}\left(\frac{x - (N+2)/2}{2^N} + 1\right). \quad (2.15)$$

8. Другим способом вычисления значений функций $\text{fup}_N(x)$ является разложение в быстроходящийся ряд Фурье с периодом, равным длине носителя

$$\text{fup}_{N-1}(x) = N^{-1} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{N/4-1} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}{\frac{\pi k}{N}} \right]^N \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k 2^{-i}}{N}\right)}{\frac{\pi k 2^{-i}}{N}} \right] \cos \frac{2\pi kx}{N}. \quad (2.16)$$

9. Функции $\text{fup}_N(x)$ неаналитичны ни в одной точке носителя.

Поведение функций $\text{fup}_N(x)$, $N = 2, \dots, 5$ и их преобразований Фурье представлены на рис. 2.2, 2.3.

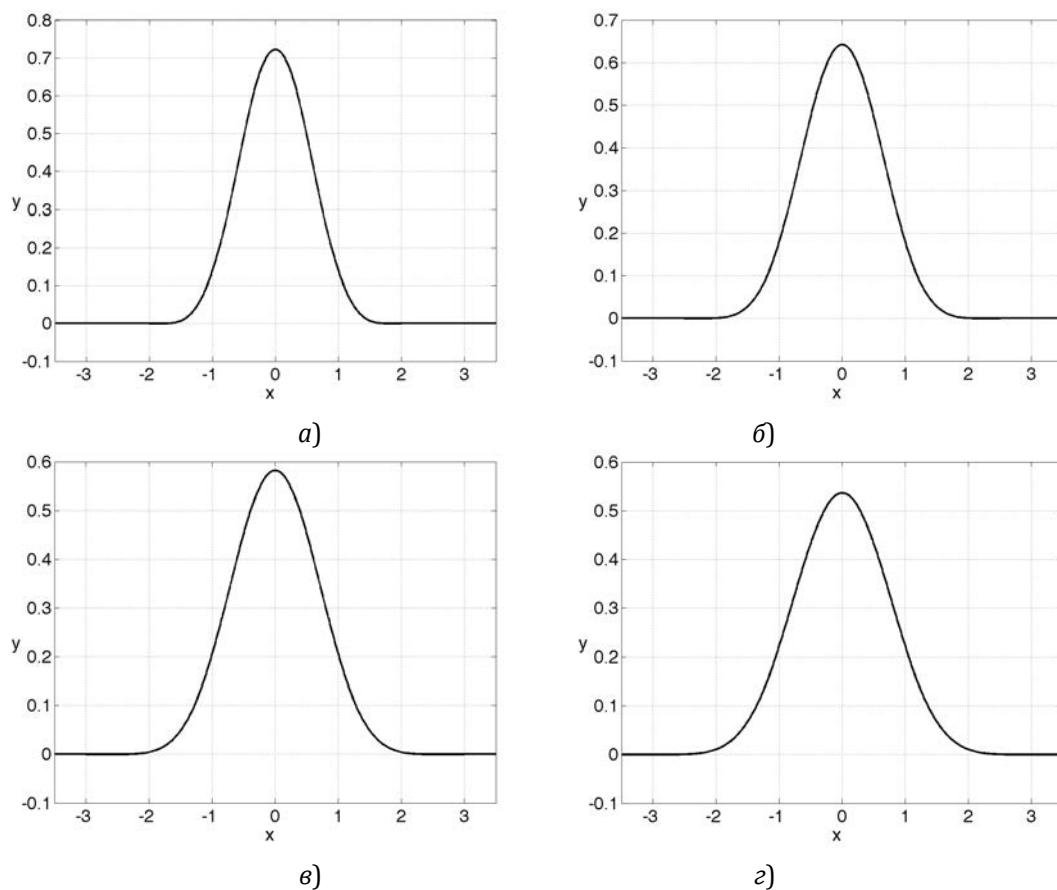


Рис. 2.2. Графики функций $fip_N(x)$ при $N = 2$ (а), $N = 3$ (б), $N = 4$ (в), $N = 2$ (г).

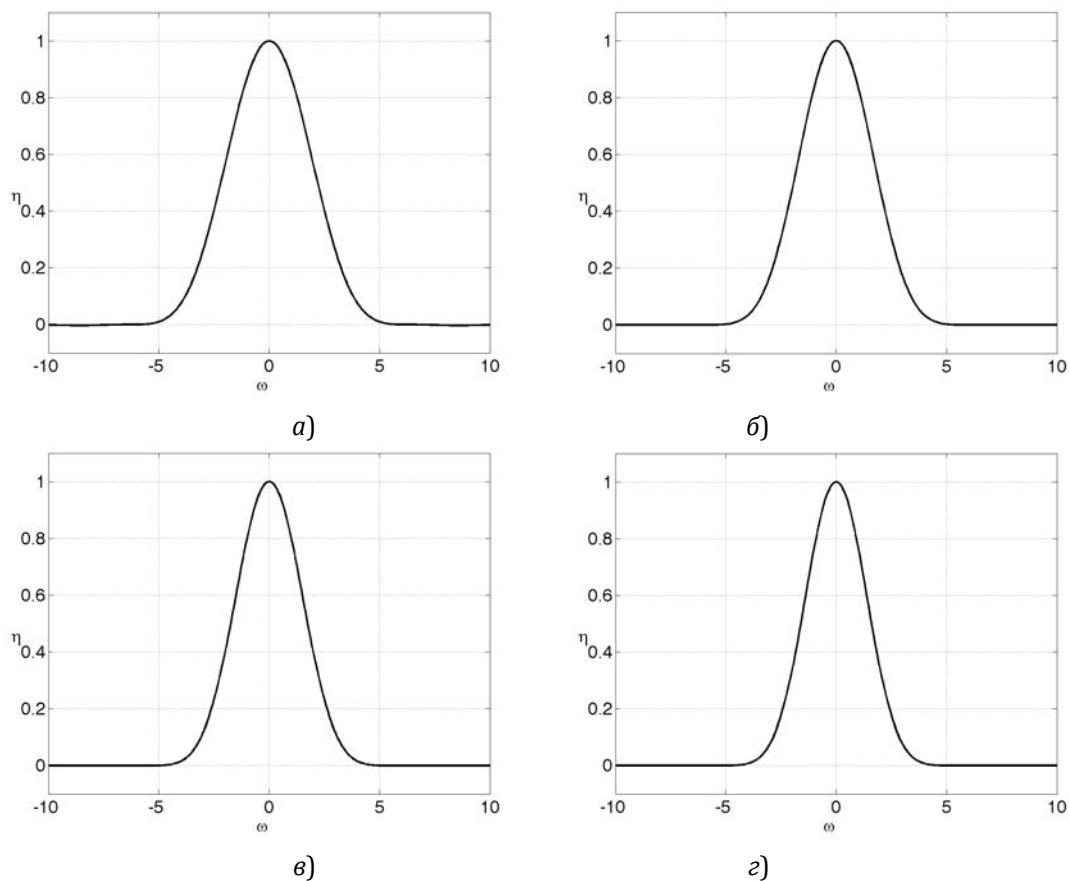


Рис. 2.3. Графики преобразования Фурье функций $fip_N(x)$ при $N = 2$ (а), $N = 3$ (б), $N = 4$ (в), $N = 5$ (г).

В [28] впервые предложен и обоснован алгоритм построения ортогональных вейвлетов Кравченко, удовлетворяющий всем требованиям КМА, на основе АФ $\text{up}(x)$, $\text{fup}_N(x)$ и др. Обобщенный алгоритм построения ортогональных вейвлетов Кравченко состоит из следующих этапов:

1. Построение частичной суммы АФ $\sum_{n=-k}^k f(t+n)$, которая удовлетворяет свойствам

$$\text{supp} = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]; \sum_{n=-k}^k f(t+n) = 1 \text{ при } t \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]; \sum_{n=-k}^k f(t+n) = 0,5 \text{ для } t = \pi.$$

2. ПФ масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$ получается следующим образом: а) необходимо произвести формальную замену аргумента функций частичной суммы $t \rightarrow \omega$; б) извлечь квадратный корень из суммы.

3. Проверить условие [13,14, 18, 21, 25–28]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1 \text{ п.в.} \quad (2.17)$$

4. Определить частотную функцию $H_0(\omega)$ и проверить выполнение масштабирующего уравнения [13,14, 18, 21, 25–28]

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right). \quad (2.18)$$

5. Проверить условие [13,14, 18, 21, 25–28]

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \text{ п.в.} \quad (2.19)$$

6. Найти ПФ вейвлет-базиса $\hat{\psi}(\omega)$ по формуле

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{i\omega/2} (\hat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \hat{\varphi}(\omega + 2\pi)) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.20)$$

7. Проверить равенство [13,14, 18, 21, 25–28]

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 + |\hat{\psi}(\omega)|^2 = \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2. \quad (2.21)$$

8. Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, выполнив обратное преобразование Фурье (ОПФ).

9. Определить размеры эффективных носителей.

10. Вычислить коэффициенты фильтров масштабирующей функции $\{h_n : n \in \mathbb{Z}\}$ и вейвлет функции $\{g_n : n \in \mathbb{Z}\}$, а также проверить условие

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = H_0(0) = 1. \quad (2.22)$$

11. Найти функции неопределенности $\Delta_{\varphi} \Delta_{\hat{\varphi}}$ и $\Delta_{\psi} \Delta_{\hat{\psi}}$ [13,14,25–28], а также провести сравнение с известными аналогами.

Приведем основные этапы построения вейвлетов Кравченко на основе АФ $\text{up}(t)$ и $\text{fup}_N(t)$ с помощью указанного алгоритма.

Вейвлет Кравченко $\{\tilde{\varphi}(\omega)\}$. С использованием АФ $\text{up}(t)$ спектр масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\omega)$ задается формулой (рис. 2.4)

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\sum_{n=-1}^1 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t + n\right)}. \quad (2.23)$$

Частотная функция отклика масштабирующей функции $H_0(\omega)$ находится продолжением $\hat{\varphi}(\omega)$ периодически с периодом 2π (рис. 2.5).

$$H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\omega + 2\pi n)). \quad (2.24)$$

Таким образом, в соответствии с построением (2.23) необходимые условия (2.18), (2.19) выполняются [25–28]. Спектр вейвлет-функции $\hat{\psi}(\omega)$ определяется по формуле (2.20) и имеет вид показанный на рис. 2.6.

Таким образом, построено преобразование Фурье масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлет-функции $\psi(x)$, порождающих КМА [25–28] (рис. 2.7, 2.8)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi/3} \hat{\varphi}(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega/2} \widehat{\varphi}(\omega/2) (\widehat{\varphi}(\omega - 2\pi) + \widehat{\varphi}(\omega + 2\pi)) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \widehat{\varphi}(\omega/2) \widehat{\varphi}(\omega - 2\pi) \cos \omega(x + 0.5) d\omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

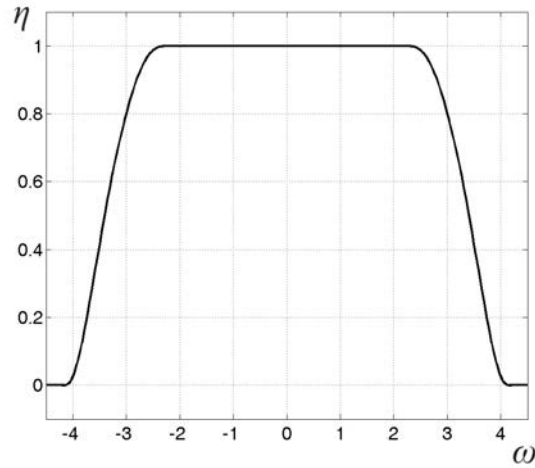


Рис. 2.4. График $\widehat{\varphi}(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$.

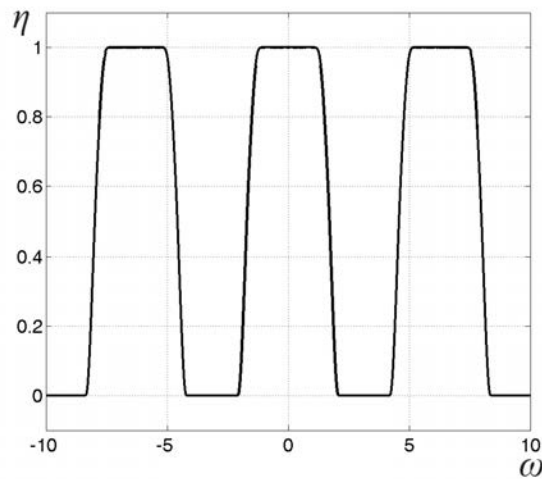


Рис. 2.5. График функции $H_0(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$.

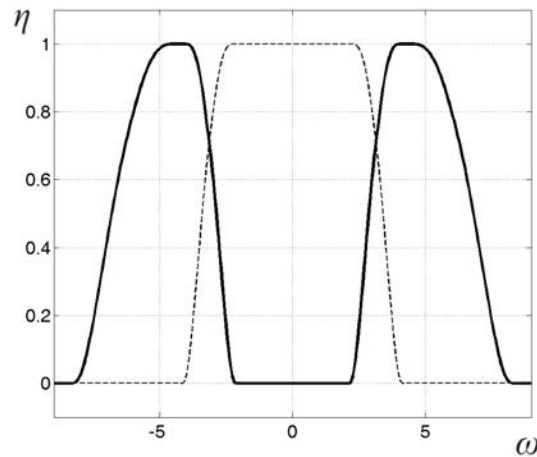


Рис. 2.6. График $\widehat{\psi}(\omega)$ для вейвлета Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$.

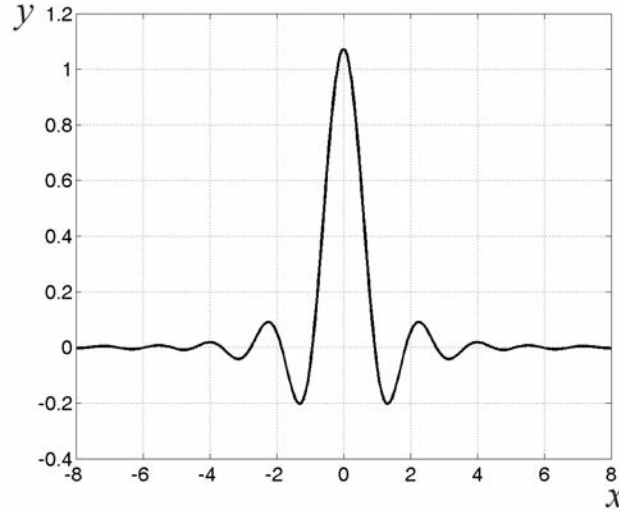


Рис. 2.7. График масштабирующей функции $\varphi(x)$ Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$.

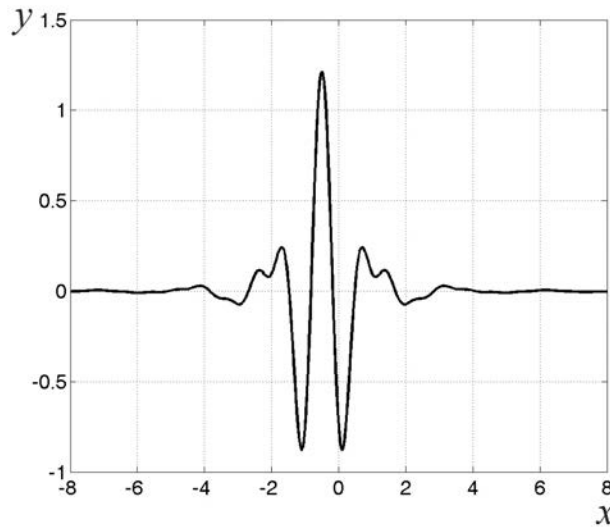


Рис. 2.8. График вейвлета $\psi(x)$ Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют масштабирующим уравнениям

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \quad (2.27)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2x - n), \quad g_n = (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1}, \quad (2.28)$$

где $\{h_n\}$ — элементы низкочастотного фильтра разложения $H(\omega) = \sqrt{2}H_0(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$, которые находятся разложением функции $H_0(\omega)$ в ряд Фурье

$$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_0(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (2.29)$$

Для коэффициентов фильтра $\{h_n\}$ условие (2.22) выполняется.

Другие фильтры определяются через $H(\omega)$ следующим образом (см. рис. 2.9):

$$G(\omega) = e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \bar{h}_{-n-1} e^{-in\omega} \text{ — высокочастотный фильтр разложения;}$$

$$\tilde{H}(\omega) = \overline{H(\omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n e^{-in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-n} e^{-in\omega} \text{ — низкочастотный фильтр восстановления;}$$

$$\tilde{G}(\omega) = e^{-i\omega} H(\omega + \pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n e^{-in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} h_{n-1} e^{-in\omega} \text{ — высокочастотный фильтр восстановления.}$$

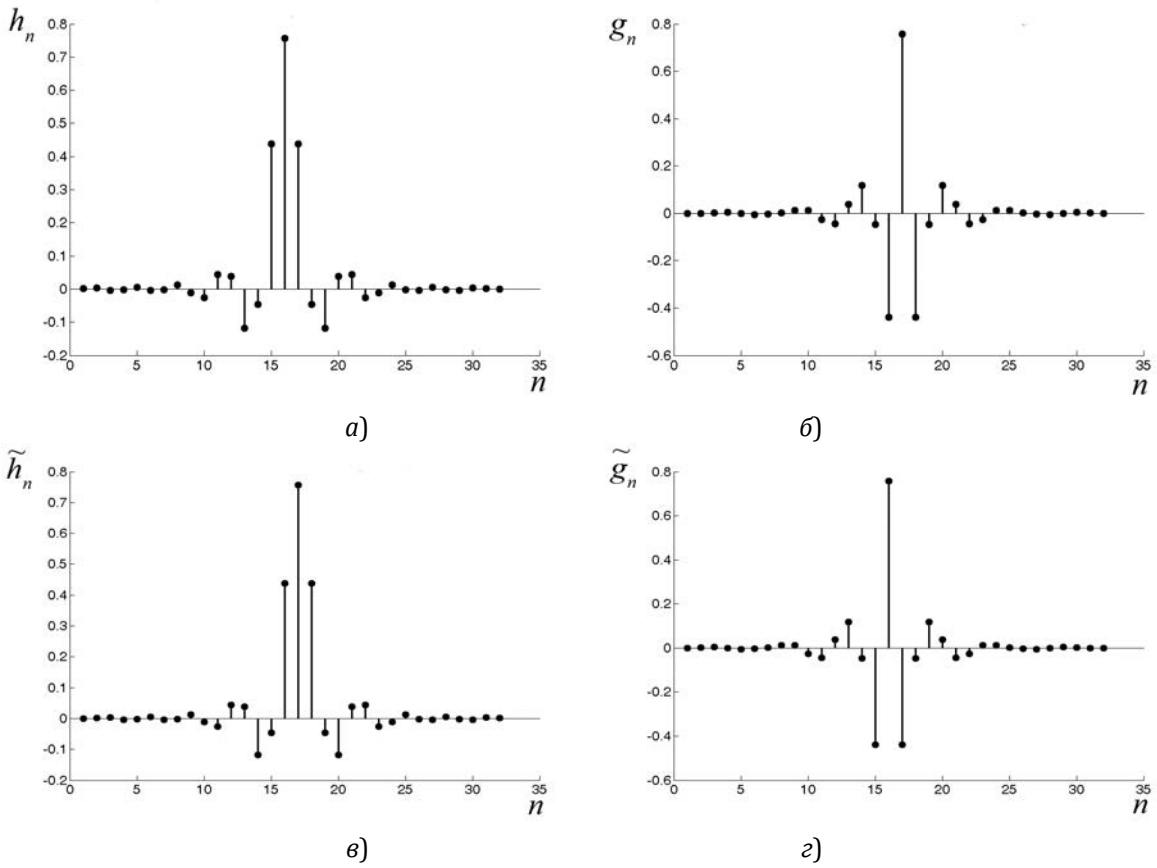


Рис. 2.9. Низкочастотный фильтр разложения $\{h_n\}$ (а); высокочастотный фильтр разложения $\{g_n\}$ (б); низкочастотный фильтр восстановления $\{\tilde{h}_n\}$ (в); высокочастотный фильтр восстановления $\{\tilde{g}_n\}$ (г).

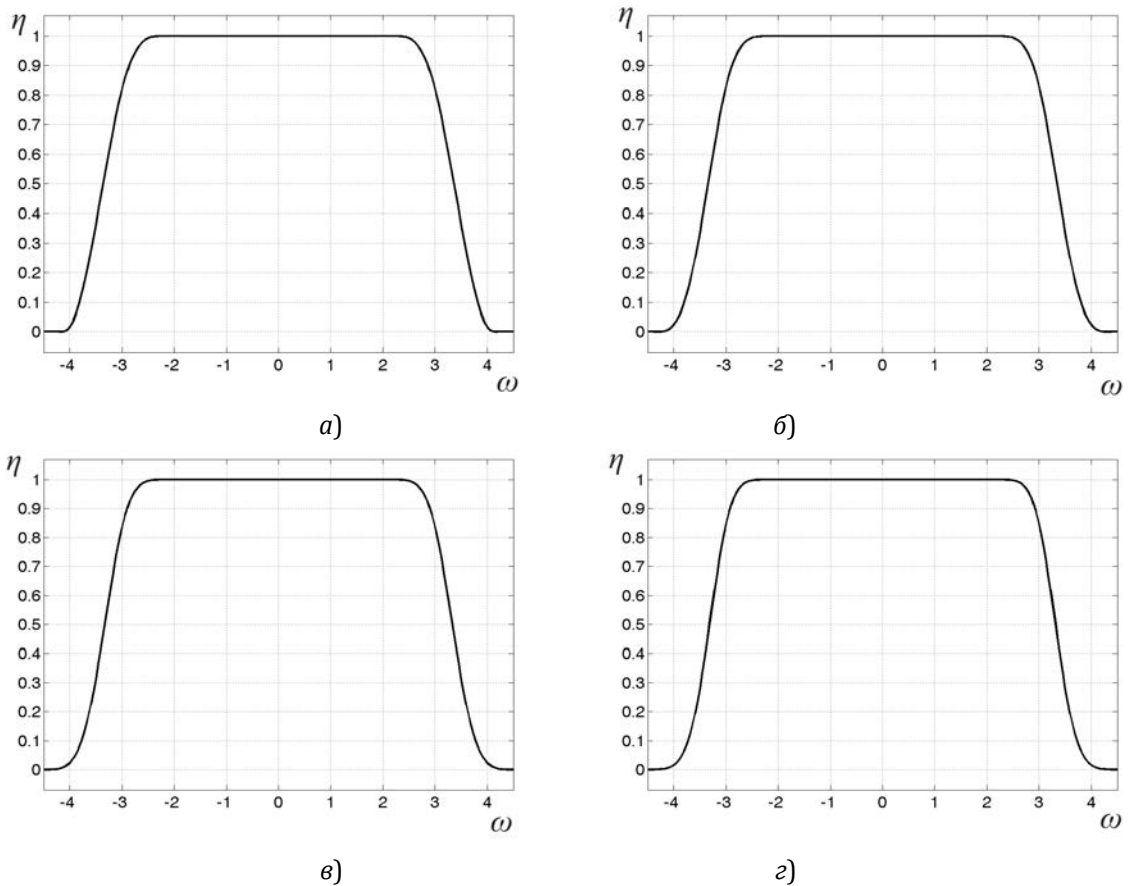


Рис. 2.10. Графики $\hat{\varphi}(\omega) = \widetilde{\text{fup}}_N(\omega)$ для $N = 2$ (а), $N = 4$ (б), $N = 8$ (в), $N = 16$ (г).

Семейство вейвлетов Кравченко $\{\widehat{\text{fur}}_N(\omega)\}$, $N > 1$. Преобразование Фурье масштабирующей функции Кравченко $\{\widehat{\text{fur}}_N(\omega)\}$ $\widehat{\varphi}(\omega)$ на основе АФ $\text{fur}_N(t)$ имеет вид (рис. 2.10)

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\text{fur}}_N(\omega) = \sqrt{\sum_{n=-r}^r \text{fur}_N\left(\frac{a}{\pi}\left(\frac{N+2}{2} + r\right)\omega + n\right)}. \quad (2.30)$$

Здесь a и r некоторые постоянные, выбранные в соответствии с требованиями алгоритма (этап 1, см. табл. 2.1).

Таблица 2.1. Параметры частичной суммы $\widehat{\text{fur}}_N(\omega)$, $N = 2, \dots, 17$.

N	r	a
2	4	0.75
3	5	0.73333
4	6	0.72222
5	7	0.71428
6	8	0.708333
7	9	0.7037037
8	9	0.67857
9	10	0.677419

N	r	a
10	11	0.67647
11	12	0.675675
12	12	0.65789
13	13	0.65853
14	14	6.5909
15	14	0.64444
16	14	0.63265
17	15	0.63043

Построение частотной функции отклика масштабирующей функции $H_0(\omega)$ и спектра вейвлет-функции $\widehat{\psi}(\omega)$ также проводится с использованием формул (2.20), (2.24). График $\widehat{\psi}(\omega)$ показан на рис. 2.11.

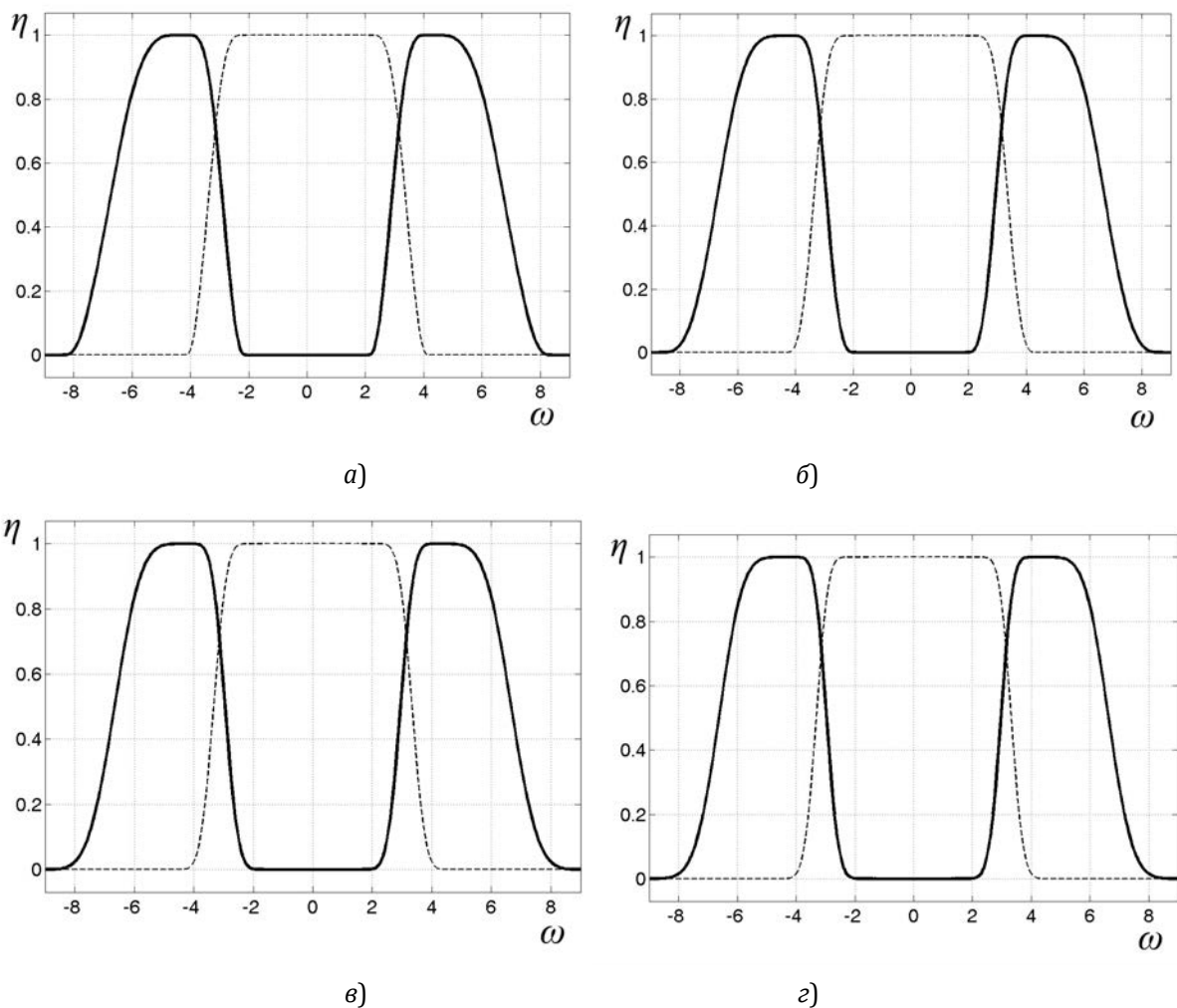


Рис. 2.11. Графики вейвлетов Кравченко $\{\widehat{\text{fur}}_N(\omega)\}$ $\widehat{\psi}(\omega)$ для $N = 2$ (а), $N = 4$ (б), $N = 8$ (в), $N = 16$ (г).

Для построения масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлет-функции $\psi(x)$ в пространственной области выполним обратное преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ согласно (2.25), (2.26). Определив коэффициенты низкочастотного фильтра разложения $\{h_n\}$ по (2.29) легко убедиться, что построенные таким образом вейвлеты Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ удовлетворяют масштабирующим уравнениям (2.27), (2.28). Графики функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ для вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$, $N = 2, 4, 8, 16$, показаны на рис. 2.12, 2.13.

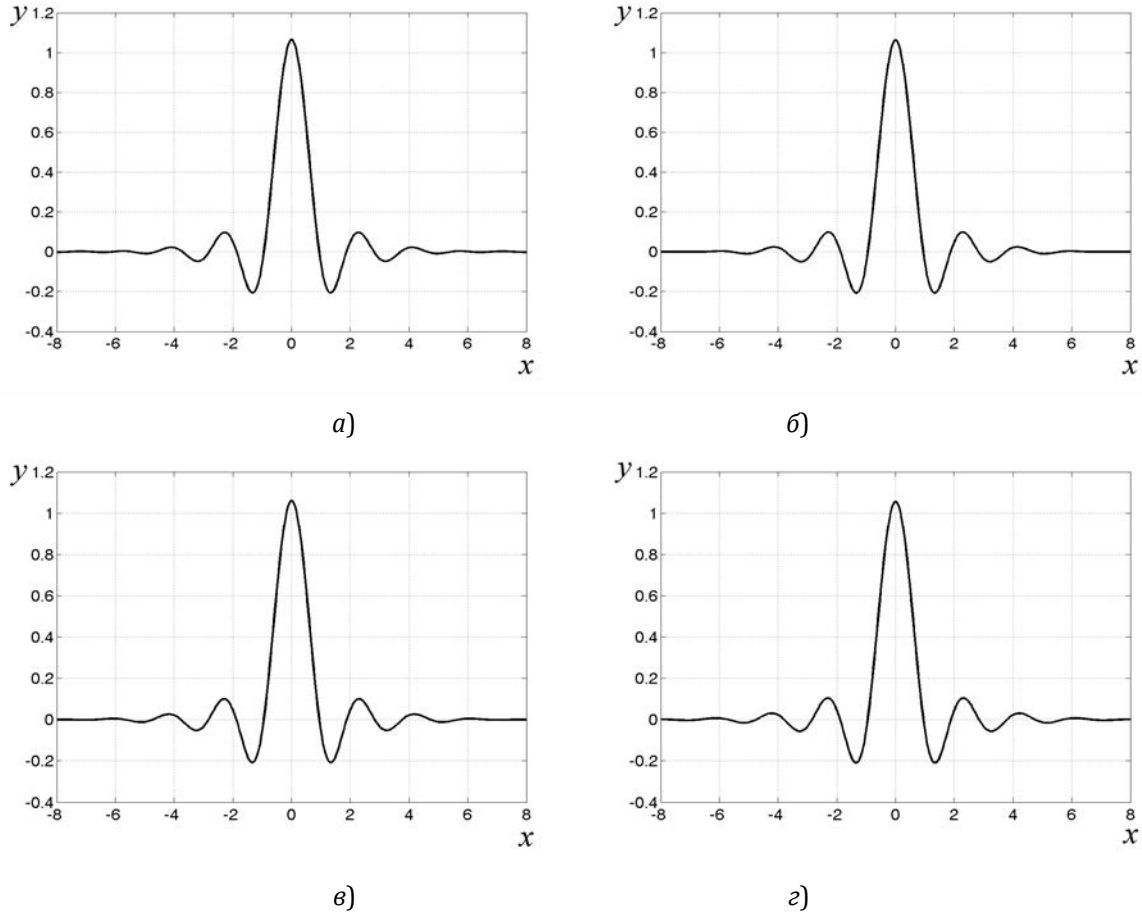


Рис. 2.12. Графики масштабирующей функции $\varphi(x)$ Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ для $N = 2$ (а), $N = 4$ (б), $N = 8$ (в), $N = 16$ (г).

На основе полученных с использованием (2.29) коэффициентов низкочастотного фильтра разложения $\{h_n\}$ получаем коэффициенты фильтров $G(\omega)$, $\tilde{H}(\omega)$, $\tilde{G}(\omega)$ (см. рис. 2.14 для вейвлета Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_2(\omega)\}$).

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$, $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ не являются финитными. Однако они быстро убывают (в силу бесконечной дифференцируемости), поэтому можно выделить их эффективный носитель $\text{supp}(\varphi_\varepsilon(x))$ и $\text{supp}(\psi_\varepsilon(x))$ из следующих условий:

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| \cdot 100\% \leq 0.001\%, \quad \|\psi - \psi_\varepsilon\| \cdot 100\% \leq 0.001\%. \quad (2.31)$$

Для некоторых вейвлетов значения $\text{supp}(\varphi_\varepsilon(x))$ и $\text{supp}(\psi_\varepsilon(x))$ приведены в табл. 2.3. Значения коэффициентов низкочастотного фильтра разложения $\{h_n\}$, число которых ограничено в соответствии с величиной $\text{supp}(\varphi_\varepsilon(x))$ показано в табл. 2.2.

Вейвлеты Кравченко своими свойствами напоминают вейвлеты Мейера [13,14, 18, 21, 25–28] и Котельникова-Шеннона, так как их алгоритм построения аналогичен. В связи с этим они обладают следующими достоинствами: симметрией, убывают значительно быстрее вейвлетов Мейера, но при этом имеют некомпактный носитель. Однако для системы вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$, $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ функции $\hat{\varphi}(\omega)$ и $\hat{\psi}(\omega)$, по сравнению с системой вейвлетов Мейера, записываются в виде единого аналитического выражения и принадлежат к классу бесконечно дифференцируемых функций, а локализация вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$, $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ по времени и частоте значительно лучше вейвлетов Котельникова-Шеннона.

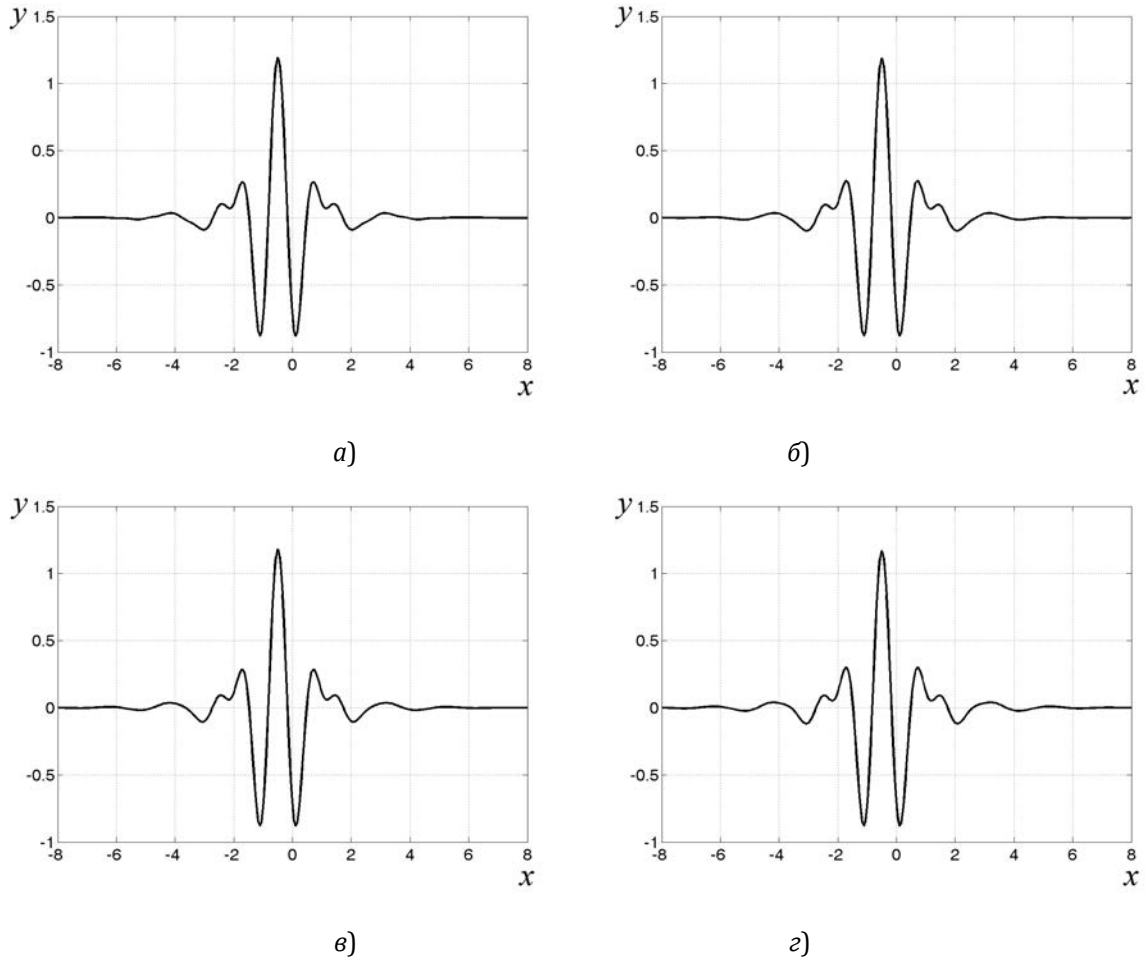


Рис. 2.13. Графики вейвлетов $\psi(x)$ Кравченко $\{\widetilde{\text{fup}}_N(\omega)\}$ для $N = 2$ (а), $N = 4$ (б), $N = 8$ (в), $N = 16$ (г).

Таблица 2.2. Коэффициенты фильтра $\{h_n\}$ вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$ и $\{\widetilde{\text{fup}}_N(\omega)\}$, $N = 2, 4, 8$

n	$h_n = h_{-n}$			
	$\{\widetilde{\text{up}}(\omega)\}$	$\{\widetilde{\text{fup}}_N(\omega)\}, N = 2, 4, 8$		
		N = 2	N = 4	N = 8
0	0.757698251288	0.753117883758	0.751690134933	0.750092264349
1	0.438708321041	0.440682932200	0.441222946160	0.441804458720
2	-0.047099287129	-0.043178930071	-0.041796290935	-0.040337135646
3	-0.118027008279	-0.123388058647	-0.124987992607	-0.126642108835
4	0.037706980974	0.035499766971	0.034309220121	0.033264607367
5	0.043603935723	0.050890260724	0.053432685600	0.055874341507
6	-0.025214528289	-0.025102187531	-0.024353106483	-0.023954411397
7	-0.011459893503	-0.018883182785	-0.022045882572	-0.024800230517
8	0.013002207742	0.014608128980	0.014555894480	0.014884321152
9	-0.001878954975	0.004210371266	0.007442614689	0.009947166461
10	-0.003758906625	-0.006197778215	-0.006923189587	-0.007820846788
11	0.005085949920	0.001052542629	-0.001611566664	-0.003415104011
12	-0.001349824585	0.000962971314	0.002253528579	0.003357819409
13	-0.003639380570	-	0.000052445920	0.000997896020
14	0.002763059895	-	-0.000189566204	-0.001105219900
15	0.001188712844	-	-0.000032923756	-0.000290154439
16	-0.001940226446	-	-0.000258206216	0.000240195056
$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n$	1	1	1	1

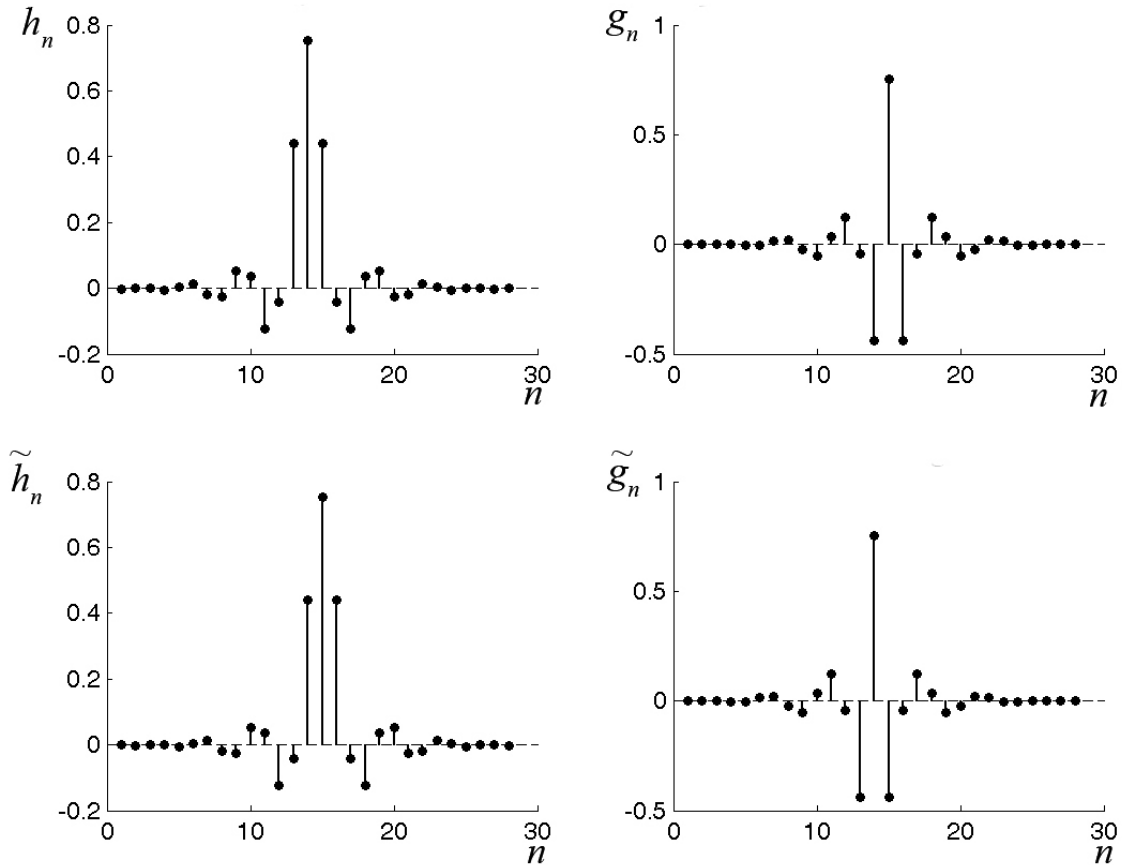


Рис. 2.14. Коэффициенты фильтров разложения и восстановления для вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$, $N = 2$.

В [4–7] приведено сравнение вейвлетов Кравченко с известными вейвлетами по величине эффективного носителя (2.31) и константам неопределенности, которые, согласно [13,14, 16, 21, 25–28], для функции $f(t)$ определяются так

$$t_f^* = \frac{1}{\|f(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt, \Delta_f = \frac{1}{\|f(t)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_f^*)^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad (2.32)$$

$$\omega_f^* = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \Delta_f = \frac{1}{\|\hat{f}(\omega)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_f^*)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (2.33)$$

Константы неопределенности являются одной из главных физических характеристик вейвлетов [13,14,16], так как дают полную информацию о пространственно-частотном разрешении функции и распределении её энергии. Одним из важных моментов является следующий: константы неопределенности инвариантны к сдвигам, сжатиям и масштабированию функции. Это делает такую оценку эффективной при анализе конкретных схем КМА. Пространственно-частотная локализация характеризуется произведением $\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}}$, $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$. В табл. 2.3 приведены сравнительные физические характеристики для вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$, $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$, вейвлетов Мейера и Котельникова-Шеннона.

Из табл. 2.3 следует, что пространственно-частотная локализация для функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$, $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ ($N=2 \div 16$) меньше чем у вейвлетов Мейера. Однако $\Delta_\varphi \Delta_{\hat{\varphi}}$ и $\Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$ увеличиваются с ростом порядка N . Величина эффективного носителя вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ для $N = 2, 3$ меньше, чем у вейвлетов Мейера, а у вейвлетов Кравченко $\{\widetilde{\text{ur}}(\omega)\}$ и $\{\widetilde{\text{fur}}_N(\omega)\}$ при $N > 4$ одинаковая. Построение и свойства других вейвлетов Кравченко, полученных на основе АФ рассматривается в [28]. Вейвлеты Кравченко эффективно применяются во многих областях физики и техники [25–28, 36–38].

Таблица 2.3. Физические характеристики различных систем вейвлетов

Вейвлеты	$\widehat{\varphi}(\omega)$	$\text{supp}(\varphi_{\Omega}(x)),$ $\text{supp}(\psi_{\Omega}(x))$	Константы неопределенности		
			$\Delta_{\varphi}\Delta_{\widehat{\varphi}}$	$\Delta_{\psi}\Delta_{\widehat{\psi}}$	
Кравченко $\{\text{up}(\omega)\}$	$\sqrt{\sum_{n=-1}^1 \text{up}\left(\frac{3}{2\pi}t+n\right)}$	[-8, 8]	0.87265	2.83010	
Кравченко $\{\text{fur}_N(\omega)\}$	$\sqrt{\sum_{n=-r}^r \text{fur}_N\left(\frac{a}{\pi}\left(\frac{N+2}{2}+r\right)\omega+n\right)}$	N=2	[-6, 6]	0.87263	2.83007
		N=3	[-6, 6]	0.90742	2.94076
		N=4	[-8, 8]	0.91985	2.98079
		N=5	[-8, 8]	0.93547	3.03159
		N=6	[-8, 8]	0.952248	3.08566
		N=7	[-8, 8]	0.969014	3.14002
		N=8	[-8, 8]	0.93939	3.04408
		N=9	[-8, 8]	0.958734	3.10674
		N=10	[-8, 8]	0.977029	3.16608
		N=11	[-8, 8]	0.994362	3.22236
		N=12	[-8, 8]	0.974259	3.15712
		N=13	[-8, 8]	0.991981	3.21466
		N=14	[-8, 8]	1.008740	3.22915
		N=15	[-8, 8]	0.992493	3.21634
N=16	[-8, 8]	0.977511	3.16772		
Мейера	$\begin{cases} 1, & -\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi} \omega -1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases}$ $\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3),$ $x \in [0,1], \nu(x) + \nu(1-x) = 1$	[-8, 8]	1.01148	3.27802	
Котельникова-Шеннона	$\begin{cases} 1, & -\pi \leq \omega \leq \pi, \\ 0, & \text{для остальных } \omega \end{cases}$	$[-10^4, 10^4]$	∞	∞	

3. Вейвлет-аппроксимация решения интегрального уравнения типа свертки

Пусть масштабирующие функции и вейвлеты $\{\varphi_{j_0,k}(t), \psi_{j_0,k}(t) : j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}\}$ формируют ортогональное кратномасштабное разложение $L^2(\mathbb{R})(-\infty, \infty)$. Рассмотрим кратномасштабную аппроксимацию ограниченной кусочно-непрерывной функции $f(t) \in L^2$, которая имеет ограниченную вариацию

$$\|f(t)\|_V < \infty, \|f(t)\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

В случае недифференцируемости функции, полная вариация $f(t)$ может быть вычислена путем рассмотрения производных в смысле обобщенных функций [13, 39–41], что эквивалентно приближению производной разделенной разностью на интервале длины h , стремящимся к нулю

$$\|f(t)\|_V = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t) - f(t-h)|}{h} dt.$$

При масштабе J ортогональная проекция $f(t)$ на $V_J \subset L^2(\mathbb{R})$ есть

$$f_J(t) = P_J f(t) = P_{j_0} f(t) + Q_{j_0} f(t) + \dots + Q_{J-1} f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (3.1)$$

где P_{j_0}, Q_j — операторы ортогонального проектирования на подпространства V_{j_0} и W_j , параметр $j = j_0, \dots, J-1$, а j_0 — самый грубый масштаб, $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$, $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ — сдвиги/сжатия масштабирующих и вейвлет-функций, $a_{jk} = \int f(t) \varphi_{j,k}(t) dt$ — коэффициенты разложения по базису масштабирующих функций, $b_{jk} = \int f(t) \psi_{j,k}(t) dt$ — коэффициенты разложения по вейвлет-базису.

Так как V_J допускает ортонормированный базис $\{\varphi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, то эта проекция может быть переписана в виде конечной суммы масштабирующих функций при масштабе J с равномерным сдвигом k

$$f_J = P_J f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J,k} \varphi_{J,k}(t). \quad (3.2)$$

Вейвлеты могут эффективно аппроксимировать равномерно гладкие сигналы конечным числом базисных функций. Погрешность аппроксимации связана с дифференцируемостью по Соболеву [39, 40]. Она так же может быть вычислена для разрывных сигналов, имеющих ограниченную вариацию [39, 40]. Пространства функций Соболева $H^s(\mathbb{R})$, которые s раз дифференцируемы, есть пространства функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых удовлетворяет неравенству

$$\int |\omega|^{2s} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < +\infty.$$

Здесь рассматриваем $\psi(x)$, которые имеют быстрое убывание. Вейвлет $\psi(x)$ имеет q нулевых моментов и $\psi(t) \in C^q$ с быстро убывающими производными. Это означает, что для любого $0 < p \leq q$ и $m \in \mathbb{Z}$ существует константа C_m такая, что

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\psi^{(p)}(t)| \leq C_m (1 + |t|^m)^{-1}.$$

Вейвлет-преобразование можно рассматривать как многомасштабный дифференциальный оператор порядка q [13,14]. Это устанавливает связь между дифференцируемостью функции f и убыванием ее вейвлет преобразования при малых масштабах [13]. Поэтому для эффективной аппроксимации $f \in H^s(\mathbb{R})$ требуется $q > s$. Кроме того, согласно [13] гладкость по Соболеву эквивалентна быстрому убыванию вейвлет-коэффициентов $|(f, \psi_{j,k})|$ при убывании масштаба j .

Если f — кусочно-гладкая функция, то более эффективной является нелинейная вейвлет-аппроксимация, при которой масштаб аппроксимации уточняется в окрестности каждой особенности. Тогда аппроксимация вычисляется по коэффициентам вейвлет-разложения наибольшей амплитуды, что может быть получено с применением пороговой обработки вейвлет-коэффициентов линейной аппроксимации. Для изучения реализации нелинейных вейвлет-аппроксимаций используются пространства Бесова $B_{\beta,\gamma}^s$, которые являются естественным обобщением пространств Соболева в случае дробного порядка дифференцирования, причем во многих случаях получены соответствующие теоремы вложения [13,42,43]

$$B_{\beta,1}^s \subset W_{\beta}^s \subset B_{\beta,\infty}^s, \quad 1 \leq \beta < \infty, s > 0.$$

Пространства Бесова содержат функции, которые не дифференцируемы s раз во всех точках. Если даже f разрывна, но число разрывов конечно и f удовлетворяет равномерному условию Липшица α между этими разрывами, то $f \in B_{\beta,\gamma}^s$ (при $1/p < \alpha + 1/2, p = \beta = \gamma$).

Для удобства обозначения будем считать, что в (3.1) не нарушается последовательность масштабов j и сдвигов k , а нелинейная аппроксимация получается, когда часть коэффициентов $b_{j,k}$ принимают нулевые значения в результате пороговой обработки.

Уравнение (3.1) в частотной области имеет вид

$$\hat{f}_J(\omega) = a_{j_0}(\omega) \hat{\varphi}_{j_0}(\omega) + \sum_{j=j_0}^{J-1} b_j(\omega) \hat{\psi}_j(\omega). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\hat{\varphi}_{j_0}(\omega) = 2^{-j/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right), \quad \hat{\psi}_j(\omega) = 2^{-j/2} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right),$$

а $a_{j_0}(\omega)$ и $b_j(\omega)$ периодические частотные функции с периодом $2^{j_0+1}\pi$ и $2^{j+1}\pi$, получаемые из коэффициентов разложения $a_{j_0,k}$ и $b_{j,k}$

$$a_{j_0}(\omega) = \sum_k a_{j_0,k} e^{-i(k/2^{j_0})\omega}, \quad \{a_{j_0,k}\} \in l^2, k \in \mathbb{Z},$$

$$b_j(\omega) = \sum_k b_{j,k} e^{-i(k/2^j)\omega}, \quad \{b_{j,k}\} \in l^2, k \in \mathbb{Z}.$$

Перепишем (3.2) также в частотной области

$$\hat{f}_j(\omega) = a_j(\omega)\hat{\varphi}_j(\omega). \quad (3.4)$$

Используя масштабирующие уравнения [13–20]

$$\hat{\varphi}_{j-1}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}_j(\omega), \quad (3.5)$$

$$\hat{\psi}_{j-1}(\omega) = e^{i\omega/2^j} H_0\left(\frac{\omega}{2^j} + \pi\right)\hat{\varphi}_j(\omega) = G_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}_j(\omega), \quad (3.6)$$

покажем, что $a_j(\omega)$ можно получить из частотных функций $a_{j-1}(\omega)$ и $b_{j-1}(\omega)$ с меньшим масштабом $J-1$.

В (3.5) и (3.6) $H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\omega)$ — частотная функция отклика масштабирующей функции

с коэффициентами фильтра $\{h_k : k \in \mathbb{Z}\}$; $G_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} G(\omega)$ — частотная функция отклика

вейвлета с коэффициентами фильтра $\{g_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Преобразование Фурье $\hat{f}_j(\omega)$ определяется (3.4) при масштабе J и суммой $\hat{\varphi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ при масштабе $J-1$

$$\hat{f}_j(\omega) = a_{j-1}(\omega)\hat{\varphi}_{j-1}(\omega) + b_{j-1}(\omega)\overline{\hat{\psi}_{j-1}(\omega)}. \quad (3.7)$$

Тогда

$$a_j(\omega)\hat{\varphi}_j(\omega) = a_{j-1}(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}_j(\omega) + b_{j-1}(\omega)e^{i\omega/2^j} H_0\left(\frac{\omega}{2^j} + \pi\right)\hat{\varphi}_j(\omega). \quad (3.8)$$

Таким образом, формула для восстановления $a_j(\omega)$ по $a_{j-1}(\omega)$ и $b_{j-1}(\omega)$ имеет вид

$$a_j(\omega) = a_{j-1}(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right) + b_{j-1}(\omega)e^{i\omega/2^j} H_0\left(\frac{\omega}{2^j} + \pi\right). \quad (3.9)$$

Похожим образом с помощью масштабирующих уравнений (3.5), (3.6) можно получить [13–20] алгоритм разложения в частотной области

$$a_{j-1}(\omega) = H_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)a_j(\omega), \quad (3.10)$$

$$b_{j-1}(\omega) = e^{i\omega/2^j} H_0\left(\frac{\omega}{2^j} + \pi\right)a_j(\omega). \quad (3.11)$$

Рассмотрим аппроксимацию вейвлетами решения интегрального уравнения типа свертки (1.1) в частотной области в случае $\lambda \in L_1(\mathbb{R})$, $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ при ограниченной правой части $y(t) \in H^p$

$$\hat{x}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)\hat{K}(\omega) = \hat{y}(\omega) \left[\frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right]. \quad (3.12)$$

В случае применения вейвлетов Кравченко с финитным спектром справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $y(t) \in \mathbf{V}_j$, $\lambda \in L_1(\mathbb{R})$ и $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ при $\hat{\varphi}_j(\omega) \neq 0$, $\text{supp } \hat{\varphi}_j(\omega) = \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]$. Тогда интегральное уравнение типа свертки (1.1) имеет единственное решение в подпространстве \mathbf{V}_{j+1} .

Доказательство. Если $y \in \mathbf{V}_j$ то $y(t) = P_j y(t) = y_j(t) = \sum_k a_{j,k}^y \varphi_{j,k}(t) dt$,

где $a_{j,k}^y = \int y(t) \varphi_{j,k}(t) dt$, $\{a_{j,k}^y\} \in \ell^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда в частотной области $\hat{y}_j(\omega) = \sum_k 2^{-j/2} a_{j,k}^y e^{-i(k/2^j)\omega} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = a_j^y(\omega)\hat{\varphi}_j(\omega)$, $k \in \mathbb{Z}$,

где $a_j^y(\omega)$ периодическая функция с периодом $2^{j+1}\pi$.

С помощью частотной функции $\hat{K}(\omega)$ ПФ регуляризованного решения интегрального уравнения типа свертки (1.1) имеет вид

$$\hat{x}_p(\omega) = \hat{K}(\omega)\hat{y}_j(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right] \hat{y}_j(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right] a_j^y(\omega)\hat{\varphi}_j(\omega).$$

Так как $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$, то

$$\hat{x}_p(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right] a_j^y(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega). \quad (3.13)$$

Функция $H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$ периодическая с периодом $2^{j+2}\pi$ и не равна нулю на интервалах

$$\left[-2^j\left(\frac{4\pi}{3}\right)+2^{j+2}\pi k; 2^j\left(\frac{4\pi}{3}\right)+2^{j+2}\pi k\right], k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $a_j^y(\omega)$ имеет период $2^{j+1}\pi$, то произведение $a_j^y(\omega)H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция.

Если $\hat{K}(\omega)$ будет периодически продолжено с периодом $2^{j+2}\pi$, то это не изменит (3.13)

$$\hat{x}_p(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right]_{2^{j+2}\pi} a_j^y(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega), \quad (3.14)$$

где $\left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right]_{2^{j+2}\pi}$ — $2^{j+2}\pi$ -периодическое продолжение функции $\hat{K}(\omega)$, ограниченной интервалом $\left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]$.

Таким образом, произведение первых трех членов в выражении (3.14) является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией (рис. 3.1).

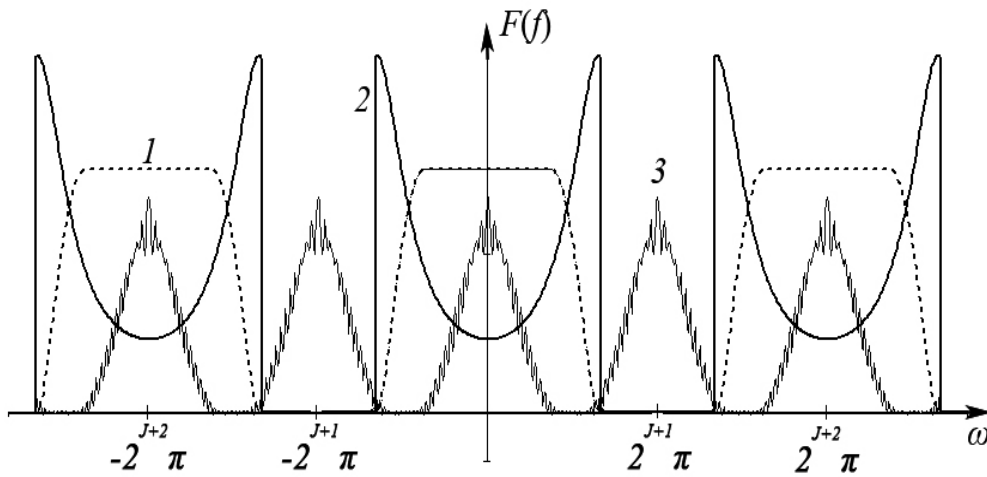


Рис. 3.1. Расположение образов Фурье функций в случае использования вейвлетов Кравченко $\{\tilde{\text{ур}}\}$:

$$1 - H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), 2 - \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right]_{2^{j+2}\pi}, 3 - a_j^y(\omega).$$

Введём обозначение $a_{j+1}^{\tilde{x}_p}(\omega) = \left[\hat{K}(\omega) \Big|_{\omega \in \left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]} \right]_{2^{j+2}\pi} a_j^y(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$ — $2^{j+2}\pi$ -периодическая частотная функция. Получим, что

$$\hat{x}_p(\omega) = 2^{-(j+1)/2} a_{j+1}^{\tilde{x}_p}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) = a_{j+1}^{\tilde{x}_p}(\omega) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega). \quad (3.15)$$

Следовательно, $\tilde{x}_p \in \mathbf{V}_{j+1}$. С другой стороны, так как частотная характеристика $\hat{\lambda}(\omega)$ непрерывна и не равна нулю на $\left[-2^j \frac{4\pi}{3}; 2^j \frac{4\pi}{3}\right]$, то и частотная функция $\hat{K}(\omega)$ обладает такими же свойствами. Тогда (1.1) имеет единственное решение. **Что и требовалось доказать.**

Если $y(t) \notin \mathbf{V}_j$, то осуществляем проекцию $y(t)$ на пространство масштабирующих функций самого точного масштаба \mathbf{V}_j . В результате уравнение свертки преобразуется к виду

$$(\lambda * x)(t) = y_j(t), \text{ где } y_j(t) = P_j y(t). \quad (3.16)$$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{x}_{j+1}(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$ такое, что

$$(\lambda * \tilde{x}_{j+1})(t) = y_j(t).$$

Таким образом, $\tilde{x}_{j+1}(t)$ является вейвлет-аппроксимацией точного решения \bar{x} и можно получить оценку.

Теорема 3.2. Пусть ядро интегрального уравнения типа свертки $\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ имеет ненулевое преобразование Фурье, $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$ на $\text{supp}(\hat{\varphi})$, где $\varphi(t)$ — масштабирующая функция из вейвлет-систем Кравченко.

Если α, β — действительные числа, такие, что $1 < \alpha \leq \beta$ и

1. $\hat{\lambda}(\omega) \geq C(1 + \omega^2)^{-\alpha/2}$,
2. $y \in H^\beta$.

Тогда имеет место оценка

$$\|x - \tilde{x}_{J+1}\|_{L^2} \leq C \|y - y_J\|_{H^\beta}. \quad (3.17)$$

Доказательство. Используя унитарность преобразования Фурье запишем

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}_{J+1}\|_{L^2} &= \left(\int |x - \tilde{x}_{J+1}|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int |\Delta x_{J+1}|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int |\Delta \hat{x}_{J+1}|^2 d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int |\hat{K}(\omega)(\hat{y} - \hat{y}_J)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int \left| \frac{\overline{\hat{\lambda}(\omega)}(\hat{y} - \hat{y}_J)}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right|^2 d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right] \cdot \frac{|y - y_J|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2} d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как регуляризующий компонент $R(\omega)$ всегда положительный и $\hat{\lambda}(\omega) \neq 0$, то стабилизирующий множитель принимает значения $0 < \frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{|\hat{\lambda}(\omega)|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2 + R(\omega)} \right] \frac{|y - y_J|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2} d\omega \right)^{1/2} &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int \frac{|y - y_J|^2}{|\hat{\lambda}(\omega)|^2} d\omega \right)^{1/2} \leq \left(\int |y - y_J|^2 C^2 (1 + \omega^2)^\alpha d\omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(C^2 \int |y - y_J|^2 (1 + \omega^2)^\beta d\omega \right)^{1/2} \leq C \|y - y_J\|_{H^\beta}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1, если функция правой части $y(t) \in \mathbf{V}_J$, то

$$\tilde{x}_p(t) = P_{J+1} \tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{J+1,k}^{\tilde{x}_p} \varphi_{J+1,k}(t). \quad (3.18)$$

Так как наблюдается не сигнал $x(t)$, а его линейное преобразование $\mathcal{L}x(t)$, то коэффициенты разложения в (3.18) вычислить напрямую нельзя. Поэтому будем использовать последовательность функций $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что

$$(x(t), \varphi_{j,k}(t)) = (\mathcal{L}x(t), \xi_{j,k}(t)).$$

Так как преобразование \mathcal{L} однородно, то функции $\xi_{j,k}(t)$ также представляют собой сдвиги и растяжения/сжатия некоторой функции $\xi(t)$. При этом семейство функций $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ уже не обладает свойством ортонормированности, но образует устойчивый базис. Следовательно, должны существовать такие константы $0 < A \leq B < \infty$, что

$$A \sum_k c_{j,k}^2 \leq \left\| \sum_k c_{j,k} \xi_{j,k} \right\|^2 \leq B \sum_k c_{j,k}^2$$

для всех квадратично суммируемых последовательностей $\{c_{j,k}\}$ (доказательство см. в разделе 4).

Задача построения функций $\xi_{j,k}(t)$ может быть решена с использованием двойственного базиса $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Известно [13–15], что базис $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, удовлетворяющий соотношениям двойственности $(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \delta_{n,k}$, существует и более того, допускает построение биортогональной системы вейвлетов [13–15].

В следующем разделе будет предложена и обоснована новая методика построения биортогональной системы вейвлетов позволяющая выполнить оценку полезного сигнала $x(t)$ первоначально искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$ с последующим действием шума $n(t)$.

4. Построение биортогональной системы вейвлетов для решения интегрального уравнения типа свертки

Пусть неизвестная функция $x(t)$ в (1.1) принадлежит пространству масштабирующих функций

$$\mathbf{V}_{J+1} = \overline{\cup \{\varphi_{J+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}},$$

где $\varphi(t)$ ортонормированная масштабирующая функция с финитным спектром. В качестве $\varphi(t)$ в соответ-

ствии с описанными ранее преимуществами примем масштабирующую функцию из семейства вейвлет-базисов Кравченко $\{\widehat{\text{up}}\}$. Если представить оценку полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ в виде разложения по $\{\varphi_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, то $\tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \varphi_{j+1,k}(t)$. (4.1)

Если (1.8) записать следующим образом $\hat{K}(\omega)^{-1} \hat{x}_p(\omega) = \hat{y}(\omega)$, то получим

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{K}(\omega)^{-1} \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} = \hat{y}(\omega). \quad (4.2)$$

Обозначив $\hat{\xi}_{j,k}(\omega) = \hat{K}(\omega)^{-1} \hat{\varphi}_{j,k}(\omega) = \hat{K}(\omega)^{-1} \cdot 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\varphi}(2^{-j}\omega) e^{-j\omega 2^{-j}k}$, уравнение (4.2) примет следующий вид:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\xi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} = \hat{y}(\omega). \quad (4.4)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения типа свертки (1.1) относительно неизвестной функции $x(t)$ соответствует решению (4.4) относительно неизвестной последовательности коэффициентов разложения $\{\alpha_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$, которые находятся как скалярное произведение известной функции $y(t)$ и функций $\{\tilde{\xi}_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, являющихся двойственным базисом по отношению к $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$.

С учетом того, что в практике обработки сигналов существуют разные способы задания стабилизирующего множителя $\hat{K}(\omega)$, а иногда требуется и дополнительная коррекция этой частотной характеристики сигнала, введем функцию $\hat{D}(\omega)$ модифицирующую $\hat{\varphi}_{j,k}(\omega)$, которая допускает представление (4.3) в виде $\hat{\xi}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}_{j,k}(\omega)$. Для решения (1.1) с использованием ДВП необходима новая биортогональная вейвлет-система, которая включает модифицированные в частотной области масштабирующие функции и вейвлеты, образующие две пары функций $\xi(t)$, $\gamma(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$, такие, что $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ порождают пространство масштабирующих функций \mathbf{U}_j и пространство вейвлетов \mathbf{S}_j , а функции $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ образуют двойственные базисы. Как это следует из [13–21, 44], подпространства $\mathbf{S}_j, \tilde{\mathbf{S}}_j$ получаются как ортогональное дополнение к вложенной системе подпространств $\mathbf{U}_j, \tilde{\mathbf{U}}_j$

$$\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j.$$

Подпространства $\mathbf{S}_j, \tilde{\mathbf{S}}_j$ взаимно ортогональны и образуют ортогональное разложение $L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим функции $\xi_{j,k}(t) = \xi_j(t - 2^{-j}k)$, $\gamma_{j,k}(t) = \gamma_j(t - 2^{-j}k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$\hat{\xi}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \cdot 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\varphi}(2^{-j}\omega) e^{-j\omega 2^{-j}k}, \quad (4.5)$$

$$\hat{\gamma}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \hat{\psi}_{j,k}(\omega) = \hat{D}(\omega) \cdot 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\psi}(2^{-j}\omega) e^{-j\omega 2^{-j}k}, \quad (4.6)$$

где $\hat{\varphi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ — спектр функций из ортонормированной вейвлет-системы (ранее приняты вейвлеты Кравченко $\{\widehat{\text{up}}\}$).

Преобразования (4.5), (4.6) осуществляют линейное отображение подпространств КМА \mathbf{V}_j и \mathbf{W}_j в новые подпространства \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j . Тогда новые функции $\xi_{j,k}$, $\gamma_{j,k}$ являются образами масштабирующей функции $\varphi_{j,k}$ и вейвлета $\psi_{j,k}$ в подпространствах \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j . Согласно требованиям КМА [13–21, 44] эти функции должны образовывать базис Рисса.

Лемма 4.1. Если $j < j_{\max}$, то системы функций $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\gamma_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ являются базисом Рисса подпространств \mathbf{U}_j и \mathbf{S}_j .

Доказательство. Линейная оболочка $\{\xi_{j,k}(t) : j, k \in \mathbb{Z}\}$, плотна в $L^2(\mathbb{R})$. Для доказательства того, что $\xi_{j,k}(t)$ образует базис Рисса, покажем, что существуют положительные константы A и B ($0 < A \leq B < \infty$) в \mathbf{U}_0 , такие, что

$$A \|\{c_k\}\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_k c_k \xi_{0,k} \right\|_{l_2}^2 \leq B \|\{c_k\}\|_{l_2}^2, \quad j=0, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.7)$$

для всех бесконечных суммируемых с квадратом последовательностей $\{c_k\}$, то есть

$$\|\{c_{j,k}\}\|_{l_2}^2 = \sum_k |c_{j,k}|^2 < \infty.$$

Согласно определению нормы и равенству Парсеваля

$$\left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\xi}_0(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\varphi}(\omega)|^2 |\hat{D}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega.$$

Пусть при некотором $|\omega| \geq \Omega$, $\hat{\varphi}(\omega) \approx 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 |\hat{D}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega \leq \left(\sup_{|\omega| \geq \Omega} |\hat{D}(\omega)|^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{B}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left(\sum_k c_k e^{-j\omega k} \hat{\varphi}(\omega) \right) \left(\sum_p \overline{c_p e^{-j\omega p} \hat{\varphi}(\omega)} \right) d\omega = \frac{B}{2\pi} \sum_{k,p} c_k c_p \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-j\omega k} \hat{\varphi}(\omega) \overline{e^{-j\omega p} \hat{\varphi}(\omega)} d\omega = \\ &= B \sum_{k,p} c_k c_p \int \varphi(t-k) \varphi(t-p) dt = B \sum_k |c_k|^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\left\| \sum_k c_k \xi_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 \geq \left(\inf_{|\omega| \geq \Omega} |\hat{D}(\omega)|^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = A \sum_k |c_k|^2.$$

При значениях масштаба $j \geq j_{\max}$ ($j_{\max} > 0$) может возникнуть ситуация, когда $B = \sup_{\omega \in [-2^{j_{\max}}\Omega, 2^{j_{\max}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2$ становится бесконечно большим и условие “устойчивости” (4.7) нарушается. В другом случае, когда $j \leq j_{\min}$ ($j_{\min} < 0$) может оказаться, что $\inf_{\omega \in [-2^{j_{\min}}\Omega, 2^{j_{\min}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2 = \sup_{\omega \in [-2^{j_{\min}}\Omega, 2^{j_{\min}}\Omega]} |\hat{D}(\omega)|^2$ и система функций $\xi_{j,k}(t)$ вырождается в ортонормированный базис. При $j \neq 0$ лемма доказывается аналогично. Повторяя приведенные выше действия, для случая $\gamma_{j,k}(t)$, можно доказать что $\gamma_{j,k}(t)$ образует базис Рисса.

Следующая лемма показывает, что подпространства $\{\mathbf{U}_j\}$ образуют вложенную последовательность и удовлетворяют таким пунктам определения КМА

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = L_2(\mathbf{R}). \quad (4.9)$$

Лемма 4.2. Последовательность вложенных подпространств $\{\mathbf{U}_j\}$ удовлетворяет всем требованиям КМА и

$$\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}.$$

Доказательство. Преобразование (4.5) переводит любую функцию $f(t) \in \mathbf{V}_j$ в соответствующий единственный элемент $u(t) \in \mathbf{U}_j$. Но, так как, $\{\mathbf{V}_j\}$ образуют вложенную систему подпространств, то $f(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$, следовательно, справедливо, что $u(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ и существует цепочка

$$\dots \subset \mathbf{U}_{-2} \subset \mathbf{U}_{-1} \subset \mathbf{U}_0 \subset \mathbf{U}_1 \subset \mathbf{U}_2 \subset \dots$$

Таким образом, $\{\mathbf{U}_j\}$ образуют последовательность вложенных подпространств.

Требование $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j = \{0\}$ из определения КМА проверяется от обратного. Предположим, что существует $u(t) \neq 0$ такая, что $u(t) \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j$. Получается, что образ $f(t) \neq 0$ и $f(t) \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j$, а это, в свою очередь, противоречит соответствующему пункту определения КМА для пространства \mathbf{V}_j [13–21, 44].

Соответствие условию КМА, в котором утверждается, что $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j = L_2$, будет доказано, если

$$\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1} \text{ и } \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}.$$

Пусть некоторая функция $f(t) \in \mathbf{V}_j$, тогда $f(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ если

$$\hat{f}(\omega) = a_{j+1}^f(\omega) \xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.10)$$

где $a_{j+1}^f(\omega)$ — должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция. Так как $f(t) \in \mathbf{V}_j$, то

$$\hat{f}(\omega) = b_j^f(\omega) \varphi\left(\frac{\omega}{2^j}\right), \quad (4.11)$$

где $b_j^f(\omega)$ — $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, а масштабирующая функция φ принадлежит вейвлет-системе Кравченко.

С учетом масштабирующего уравнения в частотной области имеем

$$\hat{f}(\omega) = b_j^f(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.12)$$

где произведение первых двух членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией, поскольку функция $H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$ периодическая, с периодом $2^{j+2}\pi$, и не равна нулю на интервалах

$$\left[-2^j\left(\frac{4\pi}{3}\right)+2^{j+2}\pi k; 2^j\left(\frac{4\pi}{3}\right)+2^{j+2}\pi k\right], k \in \mathbb{Z}.$$

С другой стороны из (4.5) и (3.14)

$$\hat{f}(\omega) = a_{j+1}^f(\omega)\hat{D}(\omega)\varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) = a_{j+1}^f(\omega)\left[\hat{D}(\omega)\Big|_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}\right]_{2^{j+2}\pi}\varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right). \quad (4.13)$$

Равенства (4.12) и (4.13) эквивалентны когда $a_{j+1}^f(\omega)$ — $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, а $\hat{D}(\omega)$ периодически продолжена с периодом $2^{j+2}\pi$ (см. рис. 4.1). Следовательно, $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$.

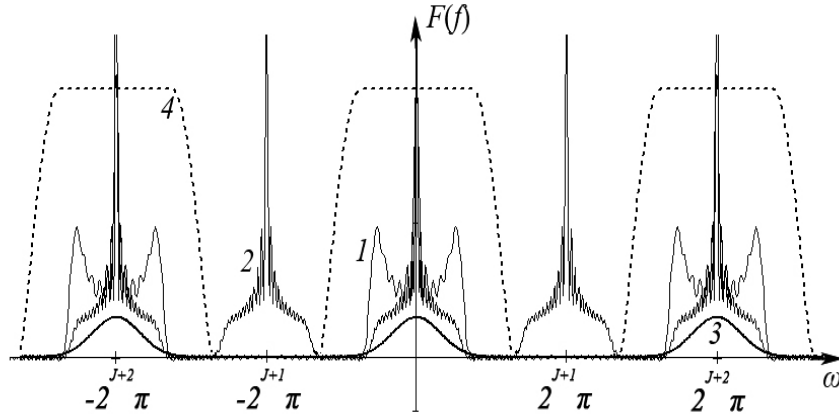


Рис. 4.1. Графики функций: 1 — $a_{j+1}^f(\omega)$, 2 — $b_j^f(\omega)$, 3 — $\left[\hat{D}(\omega)\Big|_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}\right]_{2^{j+2}\pi}$, 4 — $H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$.

Справедливость вложенности подпространств $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$ можно показать, если предположить, что некоторая функция $f(t) \in \mathbf{U}_j$, тогда $f(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$ если

$$\hat{f}(\omega) = b_{j+1}^f(\omega)\varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.14)$$

где $b_{j+1}^f(\omega)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, а функция φ также из вейвлет-системы Кравченко. Поскольку $f(t) \in \mathbf{U}_j$, то $\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega)\hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$, где $a_j^f(\omega)$ — $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция. После преобразования это равенство примет вид

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega)\hat{D}(\omega)\varphi\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = a_j^f(\omega)\left[\hat{D}(\omega)\Big|_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}\right]_{2^{j+2}\pi}H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.15)$$

где произведение первых трех членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией $b_{j+1}^f(\omega)$ (см. рис. 4.2). Следовательно, $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$ и выполняется требование КМА $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j} = L_2$, так как $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{V}_j} = L_2$.

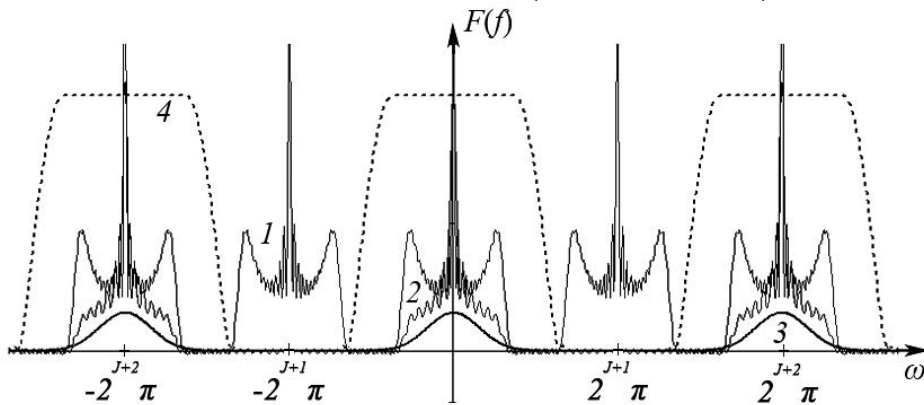


Рис. 4.2. Графики функций: 1 — $a_j^f(\omega)$, 2 — $b_{j+1}^f(\omega)$, 3 — $\left[\hat{D}(\omega)\Big|_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}\right]_{2^{j+2}\pi}$, 4 — $H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$.

Обобщив условия $\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j$ и $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, получим доказательство утверждения

$$\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}.$$

Выполнение условия, чтобы сдвиги частотно-модифицированной масштабирующей функции $\{\xi_j(t - 2^{-j}k) : k \in \mathbb{Z}\}$ образовывали базис Рисса, следует из леммы 4.1.

Далее, чтобы показать справедливость соотношения масштабируемости, пусть некоторая функция $f(t) \in \mathbf{U}_j$. Тогда

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right), \quad (4.16)$$

где $a_j^f(\omega) — 2^{j+1}\pi$ -периодическая функция. Если $f(2t) \in \mathbf{U}_{j+1}$, то

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.17)$$

где $a_{j+1}^f(\omega) —$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

Действительно, производя замену переменной ($w = \omega/2$) в (4.16) получим

$$a_{j+1}^f(\omega) = a_j^f\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Следовательно, $a_{j+1}^f(\omega)$ является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. При этом справедливо соотношение масштабируемости $f(t) \in \mathbf{U}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \mathbf{U}_{j+1}$. От соотношения масштабируемости классического КМА, это отличается тем, что пространства $\{\mathbf{U}_j\}$ образуют нестационарные по отношению к масштабу функции ξ_j , что следует из (4.5). При каждом значении масштаба j функция $\xi_j(t)$, уже не является результатом растяжения/сжатия одной функции, как в случае классического КМА. В зависимости от масштаба j изменяется носитель функции $\hat{\phi}_j(\omega)$, а также охватываемый $\hat{\phi}_j(\omega)$ частотный поддиапазон функции $\hat{D}(\omega)$. Поэтому функции ξ_j существуют только в диапазоне масштабов, которые ограничены частотным диапазоном функции $\hat{D}(\omega)$. На практике другие значения масштабов не используются, так как спектр наблюдаемого сигнала всегда находится в пределах спектрального диапазона функции $\hat{D}(\omega)$.

Сформулируем требования к подпространству модифицированных вейвлет-функций в следующей лемме.

Лемма 4.3. Если $j < j_{\max}$, то подпространства \mathbf{S}_j , являются ортогональным дополнением к вложенной системе подпространств \mathbf{U}_j

$$\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j.$$

Доказательство. Преобразование (4.5) переводит любую функцию $f(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$ в соответствующий единственный элемент $u(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$. Так как, $\{\mathbf{V}_j\}$ образуют КМА, то для каждого j существует ортогональное дополнение \mathbf{W}_j к пространству \mathbf{V}_j в пространстве \mathbf{V}_{j+1}

$$\mathbf{V}_{j+1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j, \quad \mathbf{V}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}, \quad \mathbf{W}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}.$$

Следовательно,

$$f(\omega) = a_{j+1}^f(\omega) \varphi_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \varphi_j(\omega) + b_j^f(\omega) \psi_j(\omega). \quad (4.18)$$

Исходя из того, что $\{\mathbf{U}_j\}$ удовлетворяют всем требованиям КМА и $u(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ проекция $f(t)$ из \mathbf{V}_{j+1} , которая раскладывается в прямую сумму подпространств низшего масштаба \mathbf{V}_j и \mathbf{W}_j , имеет место представление

$$\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j, \quad \mathbf{U}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}, \quad \mathbf{S}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}.$$

Базисом для подпространства \mathbf{S}_j являются сдвиги и масштабирование одной функции γ . Таким образом, с учетом нестационарности по отношению к масштабу запишем

$$u(\omega) = a_{j+1}^u(\omega) \xi_{j+1}(\omega) = a_j^u(\omega) \xi_j(\omega) + b_j^u(\omega) \gamma_j(\omega). \quad (4.19)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-1} \oplus \mathbf{S}_{j-1}$.

Следовательно, $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_{j-1} \oplus \mathbf{S}_{j-1} \oplus \mathbf{S}_j$.

Продолжая эту процедуру, получим ортогональное разложение пространства $\mathbf{U}_{j+1} : \mathbf{U}_{j+1} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^j \mathbf{S}_k}$.

Свойство КМА $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_j} = L_2$ формально позволяет представить $L_2 = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_k}$.

Так же как и для модифицированных масштабирующих функций $\xi(t)$ для вейвлет-функций $\gamma(t)$ существует ограничение по масштабу $j < j_{\max}$, больше которого условие «устойчивости» нарушается. На рис. 4.3 показано взаимное расположение образов Фурье функций

$$\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right), \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right), \hat{D}(\omega).$$

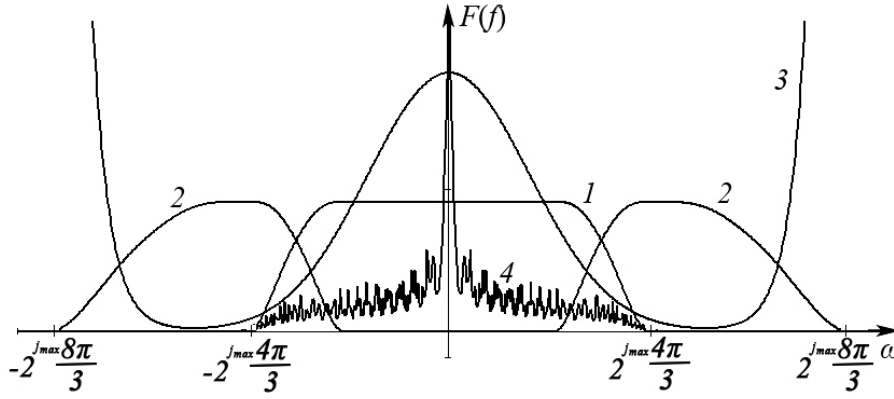


Рис. 4.3. Графики функций: 1 — $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right)$, 2 — $\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right)$, 3 — $\hat{D}(\omega)$, 4 — $\hat{f}(\omega)$.

Получается, что если даже произведение $\hat{D}(\omega)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right)$ ограничено, то $\hat{D}(\omega)\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_{\max}}}\right)$ может выйти за динамический диапазон измерения.

С помощью теоремы о двойственном базисе [13–15] и с учетом доказанных выше лемм теперь будем искать остальные модифицированные функции $\tilde{\xi}_{j,k}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, которые образуют двойственные базисы к $\xi_{j,k}(t), \gamma_{j,k}(t)$ и порождают пространство масштабирующих функций \tilde{U}_j и пространство вейвлетов \tilde{S}_j , такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j, \tilde{\mathbf{U}}_j \perp \mathbf{S}_j, \mathbf{S}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j \text{ при } j \neq l, \\ \tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j, \tilde{\mathbf{U}}_j \cap \tilde{\mathbf{S}}_j = \{0\}, \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}, \tilde{\mathbf{S}}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}. \end{aligned}$$

Непосредственное применение теоремы о двойственном базисе из [13–15] определяет преобразование Фурье базисной функции, двойственной к $\xi_j(t)$, в том смысле, что $(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \delta_{n,k}$, следующим образом:

$$\hat{\tilde{\xi}}_j(\omega) = \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2}. \quad (4.20)$$

Знаменатель $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2$ в (4.20) ограничен п.в. с границами Рисса [13–15] A и B , $0 < A \leq B < \infty$, которые были получены в доказательстве леммы 4.1

$$A \leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2 \leq B.$$

Поскольку $\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2$ ограничена снизу положительной константой, очевидно, что $1 / \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2$ также 2π -периодическая функция, принадлежащая $L_1(0, 2\pi)$.

Поэтому $\tilde{\xi}_j(t)$ раскладывается по исходному базису $\{\xi_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tilde{\xi}_j(t) = \sum_k \tilde{c}_{j,k}^\xi \xi_{j,k}(t) = \sum_k \tilde{c}_{j,k}^\xi \xi_j(t - 2^{-j}k), \quad \tilde{c}_{j,k}^\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\omega}}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2} d\omega.$$

Аналогично базисная функция $\xi_j(t)$ имеет разложение по базису $\{\tilde{\xi}_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\xi_j(t) = \sum_k c_{j,k}^\xi \tilde{\xi}_{j,k}(t) = \sum_k c_{j,k}^\xi \tilde{\xi}_j(t - 2^{-j}k), \quad c_{j,k}^\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p)|^2 e^{ik\omega} d\omega.$$

Таким же образом [13–15], определим преобразование Фурье двойственного к вейвлет-функции $\gamma_j(t)$ базиса $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, для которого справедливо равенство $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k}$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = \frac{\hat{\gamma}_j(\omega)}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}_j(\omega + 2\pi p)|^2}. \quad (4.21)$$

Так как соотношение двойственности $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k}$ коммутативно, то $\tilde{\gamma}_j(t)$, двойственное вейвлета $\gamma_j(t)$, само является вейвлетом с двойственным $\gamma_j(t)$.

Тогда для пары γ_j и $\tilde{\gamma}_j$ также справедливо разложение

$$\tilde{\gamma}_j(t) = \sum_k \tilde{c}_{j,k}^\gamma \gamma_{j,k}(t) = \sum_k \tilde{c}_{j,k}^\gamma \gamma_j(t - 2^{-j}k), \quad \tilde{c}_{j,k}^\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\omega}}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}_j(\omega + 2\pi p)|^2} d\omega,$$

$$\gamma_j(t) = \sum_k c_{j,k}^\gamma \tilde{\gamma}_{j,k}(t) = \sum_k c_{j,k}^\gamma \tilde{\gamma}_j(t - 2^{-j}k), \quad c_{j,k}^\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}_j(\omega + 2\pi p)|^2 e^{ik\omega} d\omega.$$

Полученные пары модифицированных функций удовлетворяют соотношениям биортогональности

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \delta_{n,k}, \quad (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{j,l} \delta_{n,k},$$

но нарушаются свойства ортогональности

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) = 0, \quad (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = 0,$$

что является обязательным условием существования биортогональной вейвлет-системы. Поэтому необходимо перейти к новой стратегии формирования модифицированных двойственных базисов.

Для этого введем 2π -периодическую функцию $E_j^\xi(\omega) \in L_1(0, 2\pi)$

$$E_j^\xi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{D}(2^j(\omega + 2\pi n)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi n) \right|^2. \quad (4.22)$$

Можно показать, что

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\xi}_j(\omega + 2\pi p) \right|^2 = E_j^\xi \left(\frac{\omega}{2^j} \right)$$

и $E_j^\xi(\omega)$ также ограничена п.в. константами A и B , $0 < A \leq B < \infty$

$$A \leq E_j^\xi(\omega) \leq B.$$

Тогда $1/E_j^\xi(\omega)$ является ограниченной 2π -периодической функцией в $L_1(0, 2\pi)$

$$\frac{1}{B} \leq \frac{1}{E_j^\xi(\omega)} \leq \frac{1}{A}.$$

Обращаясь к масштабирующим уравнениям в частотной области формулируем теорему.

Терма 4.1. Пусть масштабирующая функция $\xi_{j,k}(t) \in \mathbf{U}_j$ определяемая (4.5) порождает КМА в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а вейвлет $\gamma_{j,k}(t) \in \mathbf{S}_j$ при разложении $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$ задан (4.6). Тогда существуют двойственные базисы $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ заданные формулами

$$\hat{\tilde{\xi}}_j(\omega) = \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}, \quad (4.23)$$

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = \frac{\hat{\gamma}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}, \quad (4.24)$$

где

$$E_j^\xi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{D}(2^j(\omega + 2\pi n)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi n) \right|^2$$

такие, что

- а) системы функций $\{\tilde{\xi}_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\gamma}_{j,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ являются базисами Рисса подпространств $\tilde{\mathbf{U}}_j$ и $\tilde{\mathbf{S}}_j$;
- б) вложенная система базисных подпространств $\{\tilde{\mathbf{U}}_j\}$ с ортогональными дополнениями $\tilde{\mathbf{S}}_j$ образует, возможно, новый КМА и $\mathbf{V}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$;
- в) справедливо соотношение масштабируемости $f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$;
- г) обладают свойствами ортогональности:

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) = 0, \quad (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = 0, \quad (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = 0 \text{ при } j \neq l.$$

Таким образом, $\mathbf{U}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j$, $\tilde{\mathbf{U}}_j \perp \mathbf{S}_j$ и $\mathbf{S}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j$ при $j \neq l$. Следовательно, две пары функций $\xi(t)$, $\gamma(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ формируют биортогональную вейвлет-систему.

Доказательство. Сначала покажем, что $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ двойственные базисы. Из непосредственного применения равенства Парсеваля при $p = k - n$ получим

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \int \xi_j(t) \overline{\tilde{\xi}_{j,p}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\xi}_j(\omega)} e^{-ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int 2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{\overline{2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{\overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \frac{\overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega.
 \end{aligned}$$

С помощью замены $w = \frac{\omega}{2^{j+1}}$ приведем интеграл к виду

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \frac{1}{\pi} \int H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega.$$

Воспользуемся 2π -периодичностью функций $H_0(\omega)$, $1/E_{j+1}^\xi(\omega)$

$$\begin{aligned}
 (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{|D(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |D(2^{j+1}(\omega + 2\pi q)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega.
 \end{aligned}$$

Тогда
$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega.$$

Исходя из того, что $H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$ получим

$$\begin{aligned}
 (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right)} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right)} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_l} e^{il\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_l} e^{-i(m-l-2p)\omega} d\omega = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \overline{h_{m-2p}} = \delta_{0p}.
 \end{aligned}$$

Таким же образом доказывается биортогональность по сдвигу для модифицированных вейвлетов $\gamma_{j,n}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{l,k}(t)$. При $j = l$ и $p = k - n$

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) &= \int \gamma_j(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j,p}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int 2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{\overline{2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{\overline{\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 e^{i\frac{\omega}{2^{j+1}}} \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \frac{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \overline{e^{i\frac{\omega}{2^{j+1}}} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right)} \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \overline{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right)} \frac{\left|\hat{D}(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\right|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{i\frac{\omega}{2^j}} d\omega.$$

После проведения соответствующей замены

$$\begin{aligned} (\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) &= \frac{1}{\pi} \int H_0(\omega + \pi) \overline{H_0(\omega + \pi)} \frac{\left|\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)\right|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} H_0(\omega + \pi) \overline{H_0(\omega + \pi)} \frac{\left|\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)\right|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega + \pi) \overline{H_0(\omega + \pi)} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{\left|\hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi q))\hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)\right|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega + \pi) \overline{H_0(\omega + \pi)} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il(\omega + \pi)} \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im(\omega + \pi)} \right)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il(\omega + \pi)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_m} e^{im(\omega + \pi)} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_l e^{-il\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{-m} \overline{h_m} e^{im\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} (-1)^{l-m} h_l \overline{h_m} e^{-il\omega} e^{im\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} (-1)^{l-m} h_l \overline{h_m} e^{-i(l-m-2p)\omega} d\omega = \\ &= \sum_l (-1)^{2p} h_l \overline{h_{l-2p}} = \sum_l h_l \overline{h_{l-2p}} = \delta_{p,0}. \end{aligned}$$

Ортогональность относительно масштаба при $j \neq l$ будет доказана ниже.

Доказательство того, что $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$ образует базис Рисса проведем аналогично лемме 4.1.

Пусть существуют положительные константы \tilde{A} и \tilde{B} ($0 < \tilde{A} \leq \tilde{B} < \infty$) в $\tilde{\mathbf{U}}_0$, такие, что

$$\tilde{A} \|\{c_k\}\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_k c_k \tilde{\xi}_{0,k} \right\|_{l_2}^2 \leq \tilde{B} \|\{c_k\}\|_{l_2}^2, \quad j=0, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.25)$$

для всех $\|\{c_{j,k}\}\|_{l_2}^2 = \sum_k |c_{j,k}|^2 < \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \tilde{\xi}_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int \left| \hat{\xi}_0(\omega) \right|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \left| \hat{\xi}_0(\omega) / E_1^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi A} \int \left| \hat{\xi}_0(\omega) \right|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Пусть при некотором $|\omega| \geq \Omega$, $\hat{\varphi}(\omega) \approx 0$. Тогда

$$\left\| \sum_k c_k \tilde{\xi}_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 \leq \left(\sup_{|\omega| \geq \Omega} |D(\omega)|^2 \right) \frac{1}{2\pi A} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = \tilde{B} \sum_k |c_k|^2.$$

Аналогичным образом,

$$\left\| \sum_k c_k \tilde{\xi}_0(t-k) \right\|_{l_2}^2 \geq \left(\inf_{|\omega| \geq \Omega} |D(\omega)|^2 \right) \frac{1}{2\pi B} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \left| \sum_k c_k e^{-j\omega k} \right|^2 d\omega = \tilde{A} \sum_k |c_k|^2.$$

При $j \neq 0$ доказательство проводится аналогично. Для $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$ также будет существовать ограничение на значения масштаба $j \geq j_{\max}$ ($j_{\max} > 0$) при котором условие «устойчивости» (4.25) нарушается.

Похожим образом проводится доказательство того, что $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ образует базис Рисса.

Справедливость того, что последовательность вложенных подпространств $\{\tilde{\mathbf{U}}_j\}$ образует новый КМА и $\mathbf{V}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, а также то, что подпространства $\tilde{\mathbf{S}}_j$ являются ортогональным дополнением к базисной системе $\{\tilde{\mathbf{U}}_j\}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$ доказывается, так же как в лемме 4.2 и лемме 4.3.

Справедливость соотношения масштабируемости покажем в соответствии с ранее проведенным доказательством в лемме 4.2. Пусть некоторая функция $f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_j$, тогда

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right), \quad (4.26)$$

где $a_j^f(\omega)$ — $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция.

Тогда $f(2t) \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$, если

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right), \quad (4.27)$$

где $a_{j+1}^f(\omega)$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

Производя замену переменной ($w = \omega / 2$) в (4.26) получим

$$a_{j+1}^f(\omega) = a_j^f\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Следовательно, $a_{j+1}^f(\omega)$ это $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция. Тогда справедливо соотношение масштабируемости

$$f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_j \Leftrightarrow f(2t) \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}.$$

Отметим, что пространства $\{\tilde{\mathbf{U}}_j\}$ также образуют нестационарные по отношению к масштабу функции $\tilde{\xi}_j$.

Чтобы показать, что удовлетворяется свойство ортогональности подпространств $\mathbf{U}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j$ и $\tilde{\mathbf{U}}_j \perp \mathbf{S}_j$ определим соответствующее скалярное произведение порождающих функций

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) &= \int \xi_j(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j,p}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int 2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \frac{\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{2^{j+1}}}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega. \end{aligned}$$

Перейдем к более простому виду интеграла за счет замены переменной

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) = \frac{1}{\pi} \int H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega.$$

Воспользуемся 2π -периодичностью функций $H_0(\omega)$, $1/E_{j+1}^\xi(\omega)$

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi q)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im(\omega + \pi)} \right) e^{-i\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im(\omega+\pi)} e^{-i\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_l h_m e^{-i(m+l-2p+1)\omega} d\omega = \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_{2p-1-m} h_m = 0.
 \end{aligned}$$

Далее, поступая аналогично для доказательства ортогональности $\tilde{\mathbf{U}}_j \perp \mathbf{S}_j$, имеем

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\xi}_{j,n}(t), \gamma_{j,k}(t)) &= \int \tilde{\xi}_j(t) \overline{\gamma_{j,p}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \overline{2^{-j/2} \hat{D}(\omega) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 \frac{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \overline{\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int |\hat{D}(\omega)|^2 \frac{H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \overline{e^{i\frac{\omega}{2^{j+1}}} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j}}{2\pi} \int H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}} H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}} + \pi\right) \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi q)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i\omega} H_0(\omega + \pi) e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im(\omega+\pi)} \right) e^{-i\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im(\omega+\pi)} e^{-i\omega} e^{i2p\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_l h_m e^{-i(m+l-2p+1)\omega} d\omega = \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_{2p-1-m} h_m = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь легко показать биортогональность относительно масштаба для модифицированных вейвлетов $(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = \delta_{n,k} \delta_{j,l}$. Ранее был рассмотрен случай при $j = l$. Если $j \neq l$, то для $l < j$ имеем

$$\tilde{\gamma}_{l,k} \in \tilde{\mathbf{S}}_l, k \in \mathbb{Z} \text{ и } \tilde{\mathbf{S}}_l \subset \tilde{\mathbf{U}}_{l+1} \subset \dots \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j.$$

Тогда исходя из утверждения $\tilde{\mathbf{U}}_j \perp \mathbf{S}_j$, получим

$$(\gamma_{j,n}(t), \tilde{\gamma}_{l,k}(t)) = 0, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Для $l > j$ могут быть сделаны такие же заключения с использованием второго утверждения $\mathbf{U}_j \perp \tilde{\mathbf{S}}_j$.

Это завершает доказательство теоремы.

Таким образом, из теоремы следует, что две пары функций ξ, γ и $\tilde{\xi}, \tilde{\gamma}$ формируют биортогональную вейвлет-систему (см. рис. 4.4).

Тогда обеспечивается выполнение следующих необходимых условий на вейвлеты и масштабирующую функции [13–21]

$$\begin{aligned}
 \int \xi(t) dt &= \hat{\xi}(0) = \hat{D}(0) \hat{\varphi}(0) = \hat{D}(0), \quad \int \tilde{\xi}(t) dt = \hat{\tilde{\xi}}(0) = \frac{\hat{D}(0) \hat{\varphi}(0)}{E_1^\xi(0)} = \overline{\hat{D}}^{-1}(0), \\
 \int \gamma(t) dt &= \hat{\gamma}(0) = \hat{D}(0) \hat{\psi}(0) = 0, \quad \int \tilde{\gamma}(t) dt = \hat{\tilde{\gamma}}(0) = \frac{\hat{D}(0) \hat{\psi}(0)}{E_1^\xi(0)} = 0.
 \end{aligned}$$

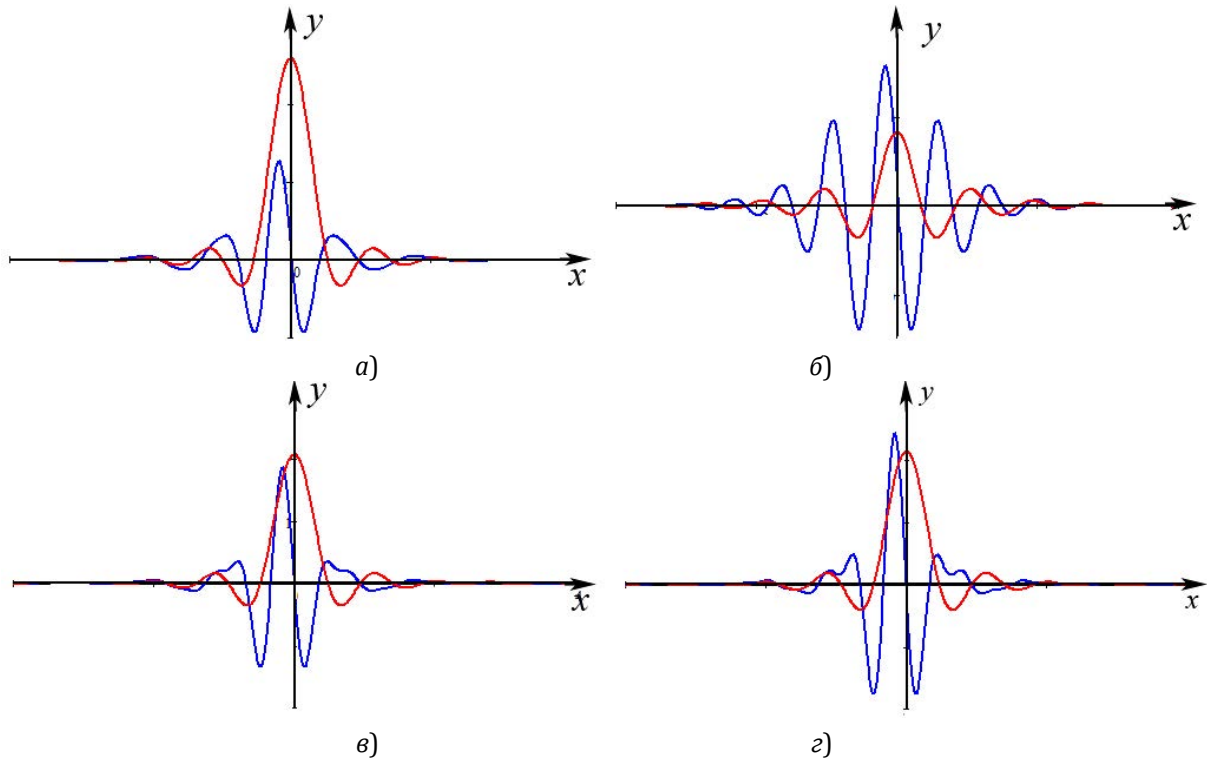


Рис. 4.4. Графики биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко $\{\tilde{u}_j\}$:
 $\xi_{j,0}(t), \gamma_{j,0}(t)$ (а), $\tilde{\xi}_{j,0}(t), \tilde{\gamma}_{j,0}(t)$ (б), $\xi_{j-2,0}(t), \gamma_{j-2,0}(t)$ (в), $\tilde{\xi}_{j-2,0}(t), \tilde{\gamma}_{j-2,0}(t)$ (г).

Таким образом, новые модифицированные базисные функции полученной вейвлет системы:

- образуют биортогональную систему базисных функций, формирующих нестационарный кратномасштабный анализ сигналов в $L_2(\mathbb{R})$;
- нестационарные по отношению к масштабу j , так как в зависимости от j изменяется носитель исходных функций $\varphi_j(\omega)$ и $\psi_j(\omega)$ и, соответственно, интервал охватываемого ими частотного поддиапазона функции $\hat{D}(\omega)$;
- при $\hat{D}(\omega) = \text{const}$ функции $\xi_j(t)$, $\tilde{\xi}_j(t)$, $\gamma_j(t)$, $\tilde{\gamma}_j(t)$ вырождаются в соответствующие исходные функции $\varphi_j(t)$ и $\psi_j(t)$.

5. Масштабирующие уравнения биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов

Так как базисные подпространства \mathbf{U}_j и $\tilde{\mathbf{U}}_j$ формируют КМА, то функции $\xi_j \in \mathbf{U}_j$, $\gamma_j \in \mathbf{S}_j$, $\tilde{\xi}_j \in \tilde{\mathbf{U}}_j$, $\tilde{\gamma}_j \in \tilde{\mathbf{S}}_j$ аналогично классическим масштабирующим уравнениям [13–21, 44] могут быть выражены в виде линейной комбинации своих масштабирующих функций $\xi_{j+1} \in \mathbf{U}_{j+1}$ или $\tilde{\xi}_{j+1} \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$.

Для функции $\xi_{j,k}(t)$ имеем соотношение

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k (\xi_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) \xi_{j+1,k}(t), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Скалярное произведение под знаком суммы будет равно

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) &= \int \xi_{j,n}(t) \overline{\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega) e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\frac{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+2}}\right)}} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\frac{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+2}}\right)}} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega. \end{aligned}$$

В результате замены переменной получим

$$\begin{aligned}
 (\xi_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(2^{j+1}\omega) H_0(\omega) \hat{\varphi}(\omega) e^{-i(2n-k)\omega} \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} \right) e^{-i(2n-k)\omega} \hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \hat{D}(2^{j+2}\omega) H_0(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+2}\omega) H_0(\omega) \hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{|\hat{D}(2^{j+2}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Исходя из 2π -периодичностью функций $H_0(\omega)$, $1/E_{j+2}^\xi(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned}
 (\xi_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^{j+2}(\omega + 2\pi q)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p e^{-ip\omega} \right)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int_0^{2\pi} \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} h_l \bar{h}_p e^{-i(l-p)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \int_0^{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |h_p|^2 d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k h_{k-2n} \xi_{j+1,k}(t) = \sqrt{2^{j+1}} \sum_k h_{k-2n} \xi(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}, \quad (5.2)$$

или в области частот

$$\hat{\xi}_j(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (5.3)$$

Аналогичным образом определим скалярное произведение для масштабирующего соотношения

$$\tilde{\xi}_{j,n}(t) = \sum_k (\tilde{\xi}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) \quad j, n, k \in \mathbb{Z}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\xi}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \int \tilde{\xi}_{j,n}(t) \overline{\xi_{j+1,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega) e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int 2^{-j/2} \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} 2^{-(j+1)/2} \overline{\hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \frac{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\frac{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \frac{\hat{D}(\omega) H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\frac{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int H_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Используем замену переменной и получаем, что

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\xi}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int H_0(\omega) e^{-i2n\omega} e^{ik\omega} \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} H_0(\omega) e^{-i2n\omega} e^{ik\omega} \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i2n\omega} e^{ik\omega} \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi q))\hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) e^{-i(2n-k)\omega} d\omega = \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} \right) e^{-i(2n-k)\omega} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\omega} e^{-i(2n-k)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-i(2n-k+m)\omega} d\omega = h_{k-2n}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\xi}_{j,n}(t) = \sum_k h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sqrt{2^{j+1}} \sum_k h_{k-2n} \tilde{\xi}(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}, \quad (5.5)$$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (5.6)$$

Построим масштабирующие соотношения, которым должны удовлетворять модифицированные вейвлет-функции $\gamma_{j,n}$ и $\tilde{\gamma}_{j,n}$.

Для $\gamma_{j,n}$ имеем

$$\gamma_{j,n}(t) = \sum_k (\gamma_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) \xi_{j+1,k}(t) \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

Проведем вычисление коэффициентов фильтра

$$\begin{aligned}
 (\gamma_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) &= \int \gamma_{j,n}(t) \overline{\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{\gamma}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \frac{\overline{\hat{D}(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+2}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(\omega) G_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \frac{\overline{\hat{D}(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+2}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int \hat{D}(2^{j+1}\omega) G_0(\omega) \hat{\varphi}(\omega) e^{-i(2n-k)\omega} \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-im\omega} \right) e^{-i(2n-k)\omega} \hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+1}\omega)\hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi\left(\frac{\omega}{2}\right)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \hat{D}(2^{j+2}\omega) H_0(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \frac{\overline{\hat{D}(2^{j+2}\omega)H_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega)}}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{|\hat{D}(2^{j+2}\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega.
 \end{aligned}$$

Так как функции $H(\omega)$, $1/E_{j+2}^\xi(\omega)$ 2π -периодические, то справедливы следующие математические преобразования:

$$\begin{aligned} (\gamma_{j,n}, \tilde{\xi}_{j+1,k}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{D}(2^{j+2}(\omega + 2\pi q)) \hat{\varphi}(\omega + 2\pi q)|^2}{E_{j+2}^\xi(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int_0^{2\pi} H_0(\omega) \overline{H_0(\omega)} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l e^{-il\omega} \right) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p e^{-ip\omega} \right)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int_0^{2\pi} \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} h_l \bar{h}_p e^{-i(l-p)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \int_0^{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |h_p|^2 d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n}. \end{aligned}$$

Теперь (5.7) перепишем в следующем виде:

$$\gamma_{j,n}(t) = \sum_k g_{k-2n} \xi_{j+1,k}(t) = \sqrt{2^{j+1}} \sum_k g_{k-2n} \xi(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.8)$$

После преобразования Фурье это соотношение примет вид

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (5.9)$$

Аналогичным образом для $\tilde{\gamma}_{j,n}$ получим

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(t) = \sum_k (\tilde{\gamma}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

Скалярное произведение под знаком суммы будет равно

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \int \tilde{\gamma}_{j,n}(t) \overline{\xi_{j+1,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \hat{\gamma}_j\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{\xi}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \frac{\hat{D}(\omega) \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int \frac{\hat{D}(\omega) G_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{-in\frac{\omega}{2^j}} \overline{\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-j-1/2}}{2\pi} \int G_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \frac{|\hat{D}(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)|^2}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}_{j,n}, \xi_{j+1,k}) &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int G_0(\omega) e^{-i2n\omega} e^{ik\omega} \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi q}^{2\pi(q+1)} G_0(\omega) e^{-i2n\omega} e^{ik\omega} \frac{|\hat{D}(2^{j+1}\omega) \hat{\varphi}(\omega)|^2}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \\ &= \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_0(\omega) e^{-i(2n-k)\omega} d\omega = \frac{2^{1/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-im\omega} \right) e^{-i(2n-k)\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-i(2n-k+m)\omega} d\omega = g_{k-2n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(t) = \sum_k g_{k-2n} \tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sqrt{2^{j+1}} \sum_k g_{k-2n} \tilde{\xi}(2^{j+1}t - k), \quad j, n, k \in \mathbb{Z}. \quad (5.11)$$

В частотной области это соотношение примет вид

$$\hat{\tilde{\gamma}}_j(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\tilde{\xi}}_{j+1}(\omega), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \leq j_{\max}. \quad (5.12)$$

Свойства частотных функций построенной биортогональной вейвлет-системы хорошо известны [13–21, 44], так как они же являются соответствующими частотными функциями исходных вейвлет-базисов $H(\omega)$ для $\hat{\phi}(\omega)$ и $G(\omega)$ для $\hat{\psi}(\omega)$. Условие на биортогональные частотные функции

$$\bar{H}(\omega)\tilde{H}(\omega) + \bar{H}(\omega + \pi)\tilde{H}(\omega + \pi) = 2 \quad (5.13)$$

полностью подтверждается условием для ортонормированного случая [13–21, 44]

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2. \quad (5.14)$$

В соответствии с утверждениями леммы 4.2 и теоремы 4.1 о вложенности подпространств

$$\mathbf{V}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}, \quad \mathbf{V}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$$

можно получить другие масштабирующие соотношения. Так как $\mathbf{U}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$, $\xi_j \in \mathbf{U}_j, \varphi_{j+1} \in \mathbf{V}_{j+1}$, то существует такая $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция $\Theta_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$, что

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \Theta_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\hat{\varphi}_{j+1}(\omega). \quad (5.15)$$

Для определения Θ_{j+1} воспользуемся уравнением

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \hat{D}(\omega)\hat{\varphi}_j(\omega) = 2^{-j/2}\hat{D}(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

Тогда

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \hat{D}(\omega)H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\hat{\varphi}_{j+1}(\omega).$$

Здесь произведение первых двух членов должно образовывать $2^{j+2}\pi$ -периодическую функцию. Для этого введем $2^{j+2}\pi$ -периодическое продолжение функции $\hat{D}(\omega)$ с промежутком $\left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]$ на \mathbb{R} (в случае использования вейвлетов Кравченко).

Тогда
$$\hat{\xi}_j(\omega) = D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)\hat{\varphi}_{j+1}(\omega). \quad (5.16)$$

Здесь

$$D_{j+1} * (\omega) = \sum_l \chi_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}(2^{j+1}(\omega + 2\pi l))\hat{D}(2^{j+1}(\omega + 2\pi l)) \quad (5.17)$$

есть 2π -периодическая функция, а $\chi_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}(\omega)$ характеристическая функция интервала $\left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]$

$$\chi_{\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\omega| \leq 2^j\frac{4\pi}{3}, \\ 0 & \text{для остальных } \omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Значит при $\omega \in \left[-2^j\frac{4\pi}{3}; 2^j\frac{4\pi}{3}\right]$ имеет место равенство

$$\hat{D}(\omega) = D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right).$$

Следовательно,

$$\Theta_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) = D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right). \quad (5.19)$$

Выполним обратное преобразование Фурье выражения (5.16) с учетом произвольного значения сдвига n

$$\hat{\xi}_{j,n}(\omega) = \left(\sum_k \theta_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}\right) 2^{-(j+1)/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-in\frac{\omega}{2^j}} = \left(\sum_k \theta_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}}\right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}}. \quad (5.20)$$

Имеем

$$\xi_{j,n}(t) = \left(\sum_k \theta_{j+1,k}\right) \frac{2^{-(j+1)/2}}{2\pi} \int \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}(k+2n)} e^{it\omega} d\omega = 2^{(j+1)/2} \sum_k \theta_{j+1,k} \varphi(2^{j+1}t - k - 2n).$$

После замены переменной $p = k + 2n$

$$\xi_{j,n}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_p \theta_{j+1,p-2n} \varphi(2^{j+1}t - p)$$

или

$$\xi_{j,n}(t) = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (5.21)$$

Исходя из (5.19) формула для вычисления $\theta_{j+1,k}$ следующая:

$$\theta_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \Theta_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega.$$

Тогда

$$\theta_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \hat{D}(\omega) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{D}(2^{j+1}\omega) H(\omega) e^{ik\omega} d\omega. \quad (5.22)$$

Поступая аналогичным образом, получим выражение для преобразования Фурье модифицированного вейвлета $\gamma_{j,n}(t)$

$$\gamma_{j,n}(\omega) = N_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in \frac{\omega}{2^j}}, \quad (5.23)$$

где $N_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)$ является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией.

Откуда следует, что

$$\hat{\gamma}_{j,n}(\omega) = \hat{D}(\omega) G \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in \frac{\omega}{2^j}}, \quad (5.24)$$

$$N_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) G \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right). \quad (5.25)$$

Тогда масштабирующее соотношение можно представить в виде

$$\hat{\gamma}_{j,n}(\omega) = \left(\sum_k \eta_{j+1,k} e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) 2^{-(j+1)/2} \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{-in \frac{\omega}{2^j}} = \left(\sum_k \eta_{j+1,k} e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in \frac{\omega}{2^j}} \quad (5.26)$$

с коэффициентами фильтра

$$\eta_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \hat{D}(\omega) G \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{in \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{D}(2^{j+1}\omega) G(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (5.27)$$

После обратного преобразования Фурье соотношение (5.26) примет вид

$$\gamma_{j,n}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \eta_{j+1,k-2n} \varphi(2^{j+1}t - k) = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (5.28)$$

Сдвиги биортогональной к $\xi_j \in \mathbf{U}_j$ масштабирующей функции $\tilde{\xi}_j$ порождают подпространство $\tilde{\mathbf{U}}_j$, а согласно теореме 4.1 выполняется условие вложенности подпространств $\tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{V}_{j+1}$. Следовательно, существует такая $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция $\tilde{\Theta}(\omega)$, что

$$\hat{\xi}_{j,n}(\omega) = \tilde{\Theta}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in \frac{\omega}{2^j}}. \quad (5.29)$$

После соответствующих преобразований имеем

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{\hat{D}(\omega) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)} \hat{\varphi}_{j+1}(\omega). \quad (5.30)$$

Тогда справедливо равенство

$$\tilde{\Theta}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = \frac{D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}. \quad (5.31)$$

В (5.29) представим $\tilde{\Theta}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)$ в виде разложения в ряд Фурье

$$\hat{\xi}_{j,n}(\omega) = \left(\sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k} e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in \frac{\omega}{2^j}}, \quad (5.32)$$

где

$$\tilde{\theta}_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \tilde{\Theta}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) e^{ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \frac{D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)} e^{ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega.$$

Тогда

$$\tilde{\theta}_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \frac{\hat{D}(\omega)H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{D}(2^{j+1}\omega)H(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{ik\omega} d\omega. \quad (5.33)$$

Далее, в результате преобразования Фурье и замены $p = k + 2n$ получим масштабирующее соотношение

$$\tilde{\xi}_{j,n}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_p \tilde{\theta}_{j+1,p-2n} \varphi(2^{j+1}t - p)$$

или

$$\tilde{\xi}_{j,n}(t) = \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (5.34)$$

Аналогично для вейвлет-функции $\tilde{\gamma}_{j,n}$ соответствующие выражения в частотной области будут иметь вид

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(\omega) = \tilde{N}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-in\frac{\omega}{2^j}}, \quad (5.35)$$

где $\tilde{N}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, которая определяется следующим образом:

$$\tilde{N}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) = \frac{D_{j+1} * \left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}. \quad (5.36)$$

Тогда, после обратного преобразования Фурье масштабирующее соотношение (5.35) во временной области можно представить в виде

$$\tilde{\gamma}_{j,n}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} \varphi(2^{j+1}t - k) = \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} \varphi_{j+1,k}(t), \quad (5.37)$$

где

$$\tilde{\eta}_{j+1,k} = \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_{-2^{j+1}\pi}^{2^{j+1}\pi} \frac{\hat{D}(\omega)G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{in\frac{\omega}{2^{j+1}}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{D}(2^{j+1}\omega)G(\omega)}{E_{j+1}^\xi(\omega)} e^{in\omega} d\omega. \quad (5.38)$$

Рассмотрим некоторые свойства коэффициентов фильтров

$$\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{\theta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \{\eta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{\eta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Коэффициенты $\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ и $\{\tilde{\theta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ биортогональны по отношению к двойному сдвигу

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \tilde{\theta}_{j,n-2p} = \delta_{p,0}, \quad (5.39)$$

что сразу следует из равенства $(\xi_{j-1,0}(t), \tilde{\xi}_{j-1,p}(t)) = \delta_{p,0}$

$$\begin{aligned} (\xi_{j-1,0}(t), \tilde{\xi}_{j-1,p}(t)) &= \int \xi_{j-1,0}(t) \overline{\tilde{\xi}_{j-1,p}(t)} dt = \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\theta}_{j,n-2p} \varphi_{j,n}(t)} dt = \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \theta_{j,k} \tilde{\theta}_{j,n-2p} \int \varphi_{j,k}(t) \overline{\varphi_{j,n}(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \tilde{\theta}_{j,2p-n} = \delta_{p,0}. \end{aligned}$$

Коэффициенты масштабирующих $\{\theta_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ и вейвлетных $\{\tilde{\eta}_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ фильтров ортогональны

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \tilde{\eta}_{j,n-2p} = 0. \quad (5.40)$$

Так как для произвольного значения $p \in \mathbb{Z}$ $(\xi_{j-1,0}, \tilde{\gamma}_{j-1,p}) = 0$, то

$$\begin{aligned} (\xi_{j-1,0}, \tilde{\gamma}_{j-1,p}) &= \int \xi_{j-1,0}(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j-1,p}(t)} dt = \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\eta}_{j,n-2p} \varphi_{j,n}(t)} dt = \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \theta_{j,k} \tilde{\eta}_{j,n-2p} \int \varphi_{j,k}(t) \overline{\varphi_{j,n}(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \tilde{\eta}_{j,n-2p} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\theta}_{j,n} \overline{\eta}_{j,n-2p} = 0. \quad (5.41)$$

Также выполняется условие на сумму коэффициентов

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} = \sqrt{2}D(0), \quad (5.42)$$

которое проверяется, если интегрировать левые и правые части масштабирующего уравнения

$$\xi_{j-1,0}(t) = \sqrt{2^j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \varphi(2^j t - n)$$

$$\int \xi_{j-1,0}(t) dt = \int \sqrt{2^j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \varphi(2^j t - n) dt.$$

Интеграл справа равен

$$2^{-j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \int \varphi(t - n) dt = 2^{-j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \int \varphi(t - n) dt = 2^{-j/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_{j,n} \hat{\varphi}(0),$$

а слева

$$\int \xi_{j-1,0}(t) dt = 2^{-(j-1)/2} D(0) \hat{\varphi}(0).$$

Аналогично получается равенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\theta}_{j,n} = \sqrt{2D}^{-1}(0). \quad (5.43)$$

Кроме того, справедливо условие на вейвлет-коэффициенты

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\eta}_{j,k} = 0. \quad (5.44)$$

Соответствующие частотные функции должны удовлетворять соотношению аналогичному (5.13)

$$\Theta_j(\omega) \tilde{\Theta}_j(\omega) + \Theta_j(\omega + \pi) \tilde{\Theta}_j(\omega + \pi) = 2. \quad (5.45)$$

Рассмотрим скалярное произведение при $p = k - n$

$$(\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) = \int \xi_j(t) \overline{\tilde{\xi}_{j,p}(t)} dt.$$

Используем равенство Парсеваля и полученные выше масштабирующие соотношения

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{\xi}_j(\omega) \overline{\hat{\xi}_j(\omega)} e^{-ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega = \\ &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int \Theta_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} e^{-ip\frac{\omega}{2^j}} d\omega. \end{aligned}$$

Выполним замену $w = \frac{\omega}{2^j}$ и разобьем на сумму по k

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{2^{-1}}{2\pi} \int \Theta_{j+1}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right)} e^{-ipw} dw = \\ &= \frac{2^{-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\omega} \sum_k \Theta_{j+1}\left(\frac{w+2\pi k}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w+2\pi k}{2}\right) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}\left(\frac{w+2\pi k}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w+2\pi k}{2}\right)} dw. \end{aligned}$$

После замены $\zeta = \frac{w}{2}$ разбиваем интеграл на отдельные суммы по четным и по нечетным составляющим, а также используем 2π -периодичность функций $\Theta_{j+1}(\omega)$ и $\tilde{\Theta}_{j+1}(\omega)$

$$\begin{aligned} (\xi_{j,n}(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i2p\zeta} \sum_k \Theta_{j+1}(\zeta + \pi k) \hat{\varphi}(\zeta + \pi k) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi k) \hat{\varphi}(\zeta + \pi k)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i2p\zeta} \Theta_{j+1}(\zeta) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} \sum_k \hat{\varphi}(\zeta + 2\pi k) \overline{\hat{\varphi}(\zeta + 2\pi k)} + \\ &\quad + \Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} \sum_k \hat{\varphi}(\zeta + 2\pi k + \pi) \overline{\hat{\varphi}(\zeta + 2\pi k + \pi)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i2p\zeta} \Theta_{j+1}(\zeta) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} \sum_k |\hat{\varphi}(\zeta + \pi 2k)|^2 + \\ &\quad + \Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} \sum_k |\hat{\varphi}(\zeta + \pi 2k + \pi)|^2 d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i2p\zeta} \frac{1}{2} \left\{ \Theta_{j+1}(\zeta) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} + \Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} \right\} d\zeta = \delta_{p0}. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место только в том случае, когда

$$\Theta_{j+1}(\zeta) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta)} + \Theta_{j+1}(\zeta + \pi) \overline{\tilde{\Theta}_{j+1}(\zeta + \pi)} = 2.$$

Можно показать, что это равенство справедливо для произвольного значения масштаба $j < j_{\max}$.

Еще один новый комплекс масштабирующих уравнений удастся получить на основе построенной биортогональной системы функций, если выполнить преобразование формулы для двойственных базисов

(4.23) в теореме 4.1 с помощью соотношения (5.3)

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)} = \frac{H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)} \hat{\xi}_{j+1}(\omega).$$

Здесь $H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)$ и $1/E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = 2^{j+2}\pi$ -периодические функции и их произведение, также является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией. Откуда следует справедливость масштабирующего уравнения в частотной области для $\tilde{\xi}_j \in \tilde{\mathbf{U}}_j$ и $\xi_{j+1} \in \mathbf{U}_{j+1}$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \tilde{H}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (5.46)$$

где

$$\tilde{H}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = \frac{H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}. \quad (5.47)$$

Если переписать соотношение для двойственного базиса (4.23) в ином виде

$$\hat{\xi}_j(\omega) = E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\xi}_j(\omega),$$

то похожим образом, с учетом (5.6), получается масштабирующее уравнение в частотной области, которое выражает функцию $\xi_j \in \mathbf{U}_j$ через масштабированную версию своего дуального базиса $\tilde{\xi}_{j+1} \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \tilde{H}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (5.48)$$

где

$$\tilde{H}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) H \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \quad (5.49)$$

есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция.

Аналогично строим новые масштабирующие уравнения для вейвлет-функций $\tilde{\gamma}_j \in \tilde{\mathbf{S}}_j$ и $\gamma_j \in \mathbf{S}_j$ исходя из (4.24) в теореме 4.1 и того, что $\hat{\gamma}_j(\omega) = E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\gamma}_j(\omega)$,

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \tilde{G}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (5.50)$$

где

$$\tilde{G}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = \frac{G \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}{E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right)}, \quad (5.51)$$

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \tilde{G}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (5.52)$$

$$\tilde{G}_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) = E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) G \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right). \quad (5.53)$$

Обращаясь к полученным масштабирующим уравнениям в частотной области можно сформулировать теорему.

Теорема 5.1. Если $j < j_{\max}$, то справедлива вложенность подпространств

$$\mathbf{U}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}, \\ \tilde{\mathbf{U}}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1},$$

а, подпространства \mathbf{S}_j и $\tilde{\mathbf{S}}_j$, являются так же ортогональным дополнением к вложенной системе подпространств \mathbf{U}_j и $\tilde{\mathbf{U}}_j$ до $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$ и \mathbf{U}_{j+1} соответственно

$$\mathbf{U}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j, \quad \tilde{\mathbf{S}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}, \\ \tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j, \quad \mathbf{S}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}.$$

Доказательство. Для того, чтобы показать вложенность масштабирующих подпространств достаточно убедиться, что $\tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ и $\mathbf{U}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$.

Для доказательства $\tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ предположим, что некоторая функция $f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_j$. Тогда $f(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ если $\hat{f}(\omega) = \tilde{a}_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega)$, а $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)$ должна быть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция.

Поскольку $f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_j$, то $\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega)$, где $a_j^f(\omega)$ — $2^{j+1}\pi$ -периодическая функция.

Преобразование этого равенства дает

$$\hat{f}(\omega) = a_j^f(\omega) \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} = a_j^f(\omega) \frac{H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} = a_j^f(\omega) \tilde{H}_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega),$$

где произведение двух первых членов является $2^{j+2}\pi$ -периодической функцией $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)$.

Следовательно, $\tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$. Аналогичным образом доказывается, что $\mathbf{U}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$. Обобщив эти условия, получим доказательство утверждений $\mathbf{U}_{j-1} \subset \tilde{\mathbf{U}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_{j-1} \subset \mathbf{U}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$.

Для доказательства второй части теоремы $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$ необходимо показать, что семейство функций $\{\xi_{j,n}(t), \gamma_{j,k}(t) : n, k \in \mathbb{Z}\}$ образует базис всего подпространства $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$. Согласно теореме 4.1 справедливо условие $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$, тогда если $f(t) \in \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$, то

$$\hat{f}(\omega) = a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega),$$

где $a_{j+1}^f(\omega)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция.

Далее $a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega) + b_j^f(\omega) \hat{\gamma}_j(\omega)$, $a_j^f(\omega)$ и $b_j^f(\omega)$ — $2^{j+1}\pi$ -периодические функции.

Преобразуем дуальные базисы масштабирующей функции и вейвлета в правой части выражения

$$a_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} + b_j^f(\omega) \frac{\hat{\gamma}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}.$$

Тогда

$$a_{j+1}^f(\omega) E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = a_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega) + b_j^f(\omega) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

а произведение первых двух членов в правой части представляет собой по-прежнему $2^{j+2}\pi$ -периодическую функцию, что доказывает $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$ и $\mathbf{S}_j \subset \tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$.

Аналогичным образом, если $f(t) \in \mathbf{U}_{j+1}$ и $\hat{f}(\omega) = \tilde{a}_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega)$, то согласно условию леммы 4.3

$$\tilde{a}_{j+1}^f(\omega) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \tilde{a}_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega) + \tilde{b}_j^f(\omega) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

где $\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)$ есть $2^{j+2}\pi$ -периодическая функция, $\tilde{a}_j^f(\omega)$ и $\tilde{b}_j^f(\omega)$ — $2^{j+1}\pi$ -периодические функции.

Следовательно,

$$\frac{\tilde{a}_{j+1}^f(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \tilde{a}_j^f(\omega) \hat{\xi}_j(\omega) + \tilde{b}_j^f(\omega) \hat{\gamma}_j(\omega).$$

Тогда $\mathbf{U}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$, $\tilde{\mathbf{S}}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$, что и требовалось доказать.

Коэффициенты масштабирующих и вейвлет-фильтров будем искать исходя из того, что частотные функции модифицированной вейвлет-системы в (5.46), (5.48), (5.50), (5.52), представляют собой произведение частотной функции исходной ортонормированной вейвлет-системы с коэффициентами фильтров $\{h_k : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{g_k : k \in \mathbb{Z}\}$, которые известны, и периодической функции E_{j+1}^ξ , для которой коэффициенты фильтра определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varsigma_{j+1,n} &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_0^{2^{j+2}\pi} e^{in\frac{\omega}{2^{j+1}}} E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\omega} E_{j+1}^\xi(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\xi}_{j+1}(\omega + 2\pi l) \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int e^{in\omega} \hat{\xi}_{j+1}(\omega) \overline{\hat{\xi}_{j+1}(\omega)} d\omega = \int \xi_{j+1}(t-n) \overline{\xi_{j+1}(t)} dt, \\ \tilde{\varsigma}_{j+1,n} &= \frac{2^{-(j+1)}}{2\pi} \int_0^{2^{j+2}\pi} \frac{e^{in\frac{\omega}{2^{j+1}}}}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\omega}}{E_{j+1}^\xi(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sum_k \varsigma_{j+1,k-n} e^{-ik\omega}} d\omega. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Для получения коэффициентов фильтра масштабирующего уравнения (5.46) выполним следующие действия:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_j(\omega) &= \frac{\hat{\xi}_j(\omega)}{E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_j(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\zeta}_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \\ &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} \tilde{\zeta}_{j+1,k} h_m e^{-i(k+m)\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega).\end{aligned}$$

После замены $p = k + m$

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \left(\sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} h_{p-k} \right) e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (5.55)$$

Введем обозначение коэффициентов фильтра для (5.55), которые представляют собой свертку известных числовых последовательностей

$$\check{h}_{j+1,p}^\xi = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} h_{p-k}. \quad (5.56)$$

Тогда

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \check{h}_{j+1,p}^\xi e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (5.57)$$

Во временной области масштабирующее уравнение имеет вид

$$\tilde{\xi}_j(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \check{h}_{j+1,k}^\xi \xi(2^{j+1}t - k) \quad \text{или} \quad \tilde{\xi}_j(t) = \sum_k \check{h}_{j+1,k}^\xi \xi_{j+1,k}(t). \quad (5.58)$$

Аналогично для (5.48) имеем

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_j(\omega) &= E_{j+1}^\xi\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) = \sum_k \zeta_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_j(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m e^{-im\frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \\ &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} \zeta_{j+1,k} h_m e^{-i(k+m)\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega).\end{aligned}$$

При соответствующей замене переменной получаем, что

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \left(\sum_k \zeta_{j+1,k} h_{p-k} \right) e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (5.59)$$

Введем обозначение коэффициентов фильтра

$$\check{h}_{j+1,p}^\zeta = \sum_k \zeta_{j+1,k} h_{p-k}. \quad (5.60)$$

Далее, представим $\hat{\xi}_j(\omega)$ как

$$\hat{\xi}_j(\omega) = \sum_p \check{h}_{j+1,p}^\zeta e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (5.61)$$

После выполнения обратного преобразования Фурье масштабирующее уравнение (5.61) примет вид

$$\xi_j(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \check{h}_{j+1,p}^\zeta \xi(2^{j+1}t - k) \quad \text{или} \quad \xi_j(t) = \sum_k \check{h}_{j+1,k}^\zeta \xi_{j+1,k}(t). \quad (5.62)$$

Подобным образом для вейвлет-функций имеем

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_j(\omega) &= \frac{\hat{\gamma}_j(\omega)}{E_{j+1}^\gamma\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\gamma}_j(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\zeta}_{j+1,k} e^{-ik\frac{\omega}{2^{j+1}}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m e^{-im\frac{\omega}{2^{j+1}}} \right) \hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \\ &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} \tilde{\zeta}_{j+1,k} g_m e^{-i(k+m)\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega).\end{aligned}$$

Это приводит к следующему выражению:

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \sum_p \left(\sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} g_{p-k} \right) e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega). \quad (5.63)$$

Тогда

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \sum_p \check{g}_{j+1,p}^\zeta e^{-ip\frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}(\omega), \quad (5.64)$$

где

$$\check{g}_{j+1,p}^\zeta = \sum_k \tilde{\zeta}_{j+1,k} g_{p-k}. \quad (5.65)$$

Во временной области (5.64) имеет вид

$$\tilde{\gamma}_j(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \check{g}_{j+1,k}^\zeta \xi(2^{j+1}t - p). \quad (5.66)$$

Поступая аналогичным образом для

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = E_{j+1}^\xi \left(\frac{\omega}{2^{j+1}} \right) \hat{\gamma}_j(\omega), \quad (5.67)$$

получим, что

$$\hat{\gamma}_j(\omega) = \sum_p \hat{g}_{j+1,p}^\xi e^{-ip \frac{\omega}{2^{j+1}}} \hat{\xi}_{j+1}^\xi(\omega), \quad (5.68)$$

где

$$\hat{g}_{j+1,p}^\xi = \sum_k \zeta_{j+1,k} g_{p-k}. \quad (5.69)$$

Во временной области (5.68) примет вид

$$\gamma_j(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_k \hat{g}_{j+1,k}^\xi \tilde{\xi}(2^{j+1}t - p). \quad (5.70)$$

Установим некоторые свойства, которыми обладают полученные коэффициенты фильтров

$$\{\hat{h}_{j,k}^\xi : k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{h}_{j,k}^\xi : k \in \mathbb{Z}\}, \{\hat{g}_{j,k}^\xi : k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{g}_{j,k}^\xi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Биортогональность по отношению к двойному сдвигу для $\hat{h}_{j,k}^\xi$ и $\tilde{h}_{j,k}^\xi$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \overline{\tilde{h}_{j,k-2p}^\xi} = \delta_{p,0}, \quad (5.71)$$

следует из равенства $(\xi_{j-1,0}(t), \tilde{\xi}_{j-1,p}(t)) = \delta_{p,0}$

$$\begin{aligned} (\xi_{j-1,0}(t), \tilde{\xi}_{j-1,p}(t)) &= \int \xi_{j-1,0}(t) \overline{\tilde{\xi}_{j-1,p}(t)} dt = \int \sum_k \hat{h}_{j,k}^\xi \tilde{\xi}_{j,k}(t) \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,n-2p}^\xi \xi_{j,n}(t)} dt = \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \overline{\tilde{h}_{j,n-2p}^\xi} \int \tilde{\xi}_{j,k} \overline{\xi_{j,n}(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,n}^\xi \overline{\tilde{h}_{j,n-2p}^\xi} = \delta_{p,0}. \end{aligned}$$

Коэффициенты масштабирующих и соответствующих вейвлет-фильтров ортогональны

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,n}^\xi \overline{\tilde{g}_{j,n-2p}^\xi} = 0. \quad (5.72)$$

Так как при $p \in \mathbb{Z}$, справедливо равенство $(\xi_{j-1,0}, \tilde{\gamma}_{j-1,p}) = 0$, то

$$\begin{aligned} (\xi_{j-1,0}, \tilde{\gamma}_{j-1,p}) &= \int \xi_{j-1,0}(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j-1,p}(t)} dt = \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \tilde{\xi}_{j,k}(t) \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j,n-2p}^\xi \xi_{j,n}(t)} dt = \\ &= \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \overline{\tilde{g}_{j,n-2p}^\xi} \int \tilde{\xi}_{j,k}(t) \overline{\xi_{j,n}(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \overline{\tilde{g}_{j,n-2p}^\xi} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,n}^\xi \overline{\hat{g}_{j,n-2p}^\xi} = 0. \quad (5.73)$$

На сумму коэффициентов накладываются отдельные условия

$$\sum_k \hat{h}_{j,k}^\xi = \sqrt{2} E_{j+1}^\xi(0), \quad (5.74)$$

которые можно проверить, если интегрировать левые и правые части масштабирующего уравнения

$$\xi_{j-1,0}(t) = 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \tilde{\xi}(2^j t - k)$$

$$\int \xi_{j-1,0}(t) dt = 2^{j/2} \int \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \tilde{\xi}(2^j t - k) dt.$$

Правый интеграл равен

$$\begin{aligned} 2^{j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \int \tilde{\xi}(2^j t - k) dt &= 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \int \tilde{\xi}(t - k) dt = \\ &= 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \hat{\xi}(0) = 2^{-j/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi \frac{\hat{\xi}(0)}{E_{j+1}^\xi(0)}. \end{aligned}$$

Левый интеграл приводится к виду

$$\int \xi_{j-1,0}(t) dt = 2^{(j-1)/2} \int \xi(2^{j-1}t) dt = 2^{-(j-1)/2} \int \xi(t) dt = 2^{-(j-1)/2} \hat{\xi}(0).$$

Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_{j,k}^\xi = \sqrt{2} E_{j+1}^\xi(0). \quad (5.75)$$

Аналогично проверяется равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j,k}^\xi = \frac{\sqrt{2}}{E_{j+1}^\xi(0)}. \quad (5.76)$$

Сумма вейвлет-коэффициентов удовлетворяет равенствам

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_{j,k}^\xi = 0, \quad (5.77)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j,k}^{\xi} = 0. \quad (5.78)$$

В биортогональном случае частотные функции $\tilde{H}_j^{\xi}(\omega)$ и $\hat{H}_j^{\xi}(\omega)$ обладают свойством

$$\overline{\tilde{H}_j^{\xi}(\omega)} \tilde{H}_j^{\xi}(\omega) + \overline{\hat{H}_j^{\xi}(\omega + \pi)} \hat{H}_j^{\xi}(\omega + \pi) = 2. \quad (5.79)$$

Выполнение равенства (5.79) легко показать с помощью непосредственной подстановки в (5.79) соотношений (5.47) и (5.49).

6. Кратномасштабная аппроксимация решения интегрального уравнения типа свертки с применением биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов Кравченко

Как было показано ранее решение интегрального уравнения типа свертки (1.1) заключается в получении оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ на основе регуляризованного спектра решения [1-7]

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \hat{y}(\omega) \hat{D}^{-1}(\omega), \quad (6.1)$$

где $\hat{D}(\omega)$ — стабилизирующий множитель, который может быть задан как $\hat{D}(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega)$.

Подставляя в (6.1) интегральное уравнение типа свертки в частотной области (1.4) получим

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \hat{\lambda}(\omega) \hat{D}^{-1}(\omega) \hat{x}(\omega) + \hat{D}^{-1}(\omega) \hat{n}(\omega).$$

Если $\hat{D}(\omega) = \hat{\lambda}(\omega)$, то оценка полезного сигнала представляется в виде (1.5).

В случае отсутствия шума решение (6.1) позволяет точно восстановить сигнал $\hat{x}(\omega)$, искаженный импульсной характеристикой $\hat{\lambda}(\omega)$ линейной стационарной системы. При наличии шума происходит его бесконечное усиление на частотах, при которых $\hat{\lambda}(\omega) \rightarrow 0$, что и приводит к необходимости использования математических подходов эффективного подавления шума к которым относится вейвлет-фильтрация [13-21].

В соответствии с (3.18) оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ ищется в виде

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \varphi_{j+1,k}(t),$$

где $\varphi_{j+1,k}(t) \in \mathbf{V}_{j+1}$ — исходные масштабирующие функции, выбранные из ортонормированных вейвлет-систем Кравченко, $a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} = (x(t), \varphi_{j+1,k}(t))$ — коэффициенты разложения $x(t)$ по масштабирующим функциям $\{\varphi_{j+1,k}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Таким образом, решение интегрального уравнения типа свертки (1.1) относительно функции $x(t)$ сводится к нахождению неизвестной последовательности коэффициентов разложения $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ [29, 45-50]. Представим (3.18) в частотной области

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}}. \quad (6.2)$$

Тогда, умножив (6.2) слева и справа на $\hat{D}(\omega)$, получим

$$\hat{D}(\omega) \hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}}. \quad (6.3)$$

С учетом (6.1), (4.5), можно показать, что коэффициенты $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ определяются в виде разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисной системе функций $\xi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, в котором $a_{j+1,k}^y = a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p}$. Действительно, так как

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} = y(\omega), \text{ то} \quad (6.3)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^y \hat{\xi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} = \hat{y}(\omega). \quad (6.4)$$

Следовательно, $y(\omega) \in \mathbf{U}_{j+1}$ и условие теоремы 3.1 выполняется поскольку $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{U}_{j+1}$ согласно лемме 4.2.

Таким образом, оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ будет определяться следующим разложением по базису $\varphi_{j+1,k}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^y \hat{\varphi}_{j+1}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j+1}}} \text{ или } \tilde{x}_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k}^y \varphi_{j+1,k}(t). \quad (6.5)$$

Подлежащие определению коэффициенты $\{a_{j+1,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ находятся исходя из существования биортогональной системы функций $\xi_{j,k}(t)$, $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$a_{j+1,k}^y = (y(t), \tilde{\xi}_{j+1,k}(t)). \quad (6.6)$$

Таким образом, оценка приближенного решения интегрального уравнения типа свертки (1.1) в виде (6.5) сводится к определению коэффициентов (6.6). Исходя из того, что предложенная и обоснованная биортогональная система вейвлет-функций $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ и $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ порождает две цепочки КМА, любую функцию из \mathbf{U}_{j+1} , можно представить в виде ортогонального разложения по базисам подпространств низшего масштаба \mathbf{U}_j , \mathbf{S}_j так, что $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$. Тогда для создания вычислительных алгоритмов оценки полезного сигнала будем искать $\tilde{x}_p(t)$ в виде разложения

$$\tilde{x}_p(t) = P_{j+1} \tilde{x}_p(t) = \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \psi_{j,k}(t), \quad (6.7)$$

которое описывает ДВП классического КМА по вейвлетам, обладающим компактным носителем в частотной области, в частности, по вейвлетам Кравченко [25–28].

В частотной области (6.7) имеет вид

$$\hat{\tilde{x}}_p(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\varphi}_{j_0}(\omega) e^{-ik\frac{\omega}{2^{j_0}}} + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \hat{\psi}_j(\omega) e^{-ik\frac{\omega}{2^j}}. \quad (6.8)$$

Коэффициенты $\{a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ являются результатом ДВП $\tilde{x}_p(t)$ при разложении до некоторого масштаба j_0 , так, что $\tilde{x}_p(t)$ представляется как сумма грубой аппроксимации $P_{j_0} \tilde{x}_p(t) \in \mathbf{V}_{j_0}$ и множества деталей $Q_j \tilde{x}_p(t) \in \mathbf{W}_j$

$$a_{j,k}^{\tilde{x}_p} = (\tilde{x}_p(t), \varphi_{j,k}(t)), \quad (6.9)$$

$$b_{j,k}^{\tilde{x}_p} = (\tilde{x}_p(t), \psi_{j,k}(t)). \quad (6.10)$$

Вместе с тем, согласно концепции КМА коэффициенты вейвлет-разложения при более грубом приближении могут быть получены рекурсивно. Действительно, пусть некоторый сигнал $f(t)$ задан 2^N отсчетами в моменты времени $t_m = m2^{-N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, умножив скалярно масштабирующие уравнения $\varphi_{j,n}(t) = \sum_k h_{k-2n} \varphi_{j+1,k}(t)$, $\psi_{j,n}(t) = \sum_k g_{k-2n} \varphi_{j+1,k}(t)$ слева и справа на $f(t)$, для произвольного масштаба j можно получить рекурсивные формулы расчета коэффициентов вейвлет-разложения от более точного масштаба $j+1$ к более грубому масштабу j

$$a_{j,n}^f = \sum_k h_{k-2n} a_{j+1,k}^f, \quad (6.11)$$

$$b_{j,n}^f = \sum_k g_{k-2n} a_{j+1,k}^f. \quad (6.12)$$

Таким образом, рекурсивный алгоритм разложения сигнала, представленный формулами (6.11), (6.12), позволяет вычислить каждые последующие коэффициенты из предыдущих с большим масштабным индексом, характеризующим более широкополосный процесс [13–21].

Графически алгоритм вейвлет-разложения сигнала $f(t)$ можно представить в виде схемы на рис. 6.1(а). Данный алгоритм реализуется с помощью многокаскадного последовательного соединения блоков фильтров, обеспечивающих быстрые вычисления ДВП.

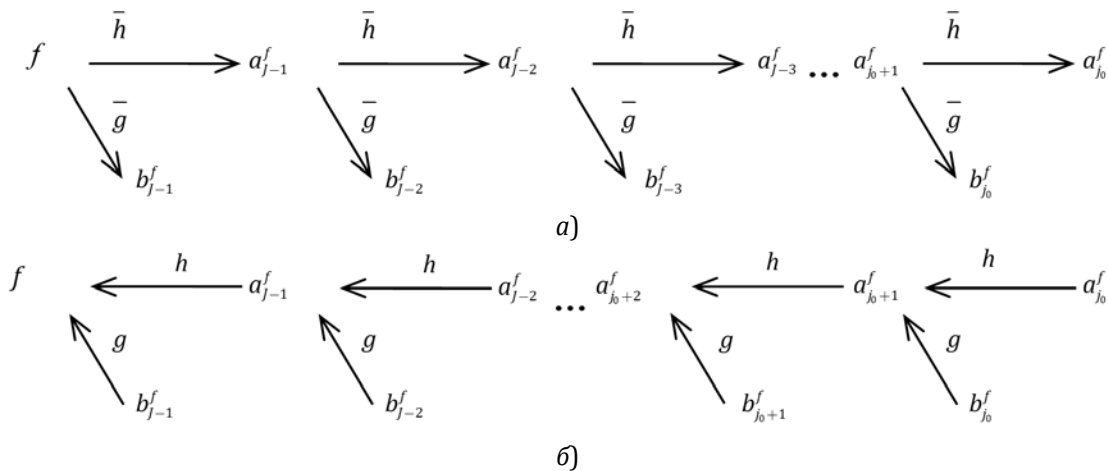


Рис. 6.1. Классическая схемы вейвлет-разложения (а) и восстановления (б) сигнала $f(t)$.

Начальные значения коэффициентов $a_{j,k}^f$ должны быть вычислены по формулам $a_{j,k}^f = (f(t), \varphi_{j,k}(t))$, $b_{j,k}^f = (f(t), \psi_{j,k}(t))$ при таком значении масштаба j , при котором в пределах спектрального диапазона сиг-

нала $\hat{f}(\omega)$ функция $\hat{\varphi}_j(\omega)$ остается практически постоянной, т.е. чтобы аппроксимация вейвлетами достаточно точно отражала сигнал $f(t)$. Такой расчет является трудоемким и может не обеспечить необходимую точность вычисления. Так как сигнал $f(t)$ практически задан своими значениями, то при большом масштабе j коэффициенты $\{a_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ можно положить равными отсчетам функции

$$a_{j,k}^f = (f(t), \varphi_{j,k}(t)) = \int f(t) \overline{\varphi_{j,k}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\varphi}_j(\omega)} e^{-i\omega \frac{k}{2^j}} d\omega \approx \frac{\hat{\varphi}_j(0)}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{-i\omega \frac{k}{2^j}} d\omega,$$

откуда следует, что при выборе вейвлет-системы Кравченко

$$a_{j,k}^f \approx f(t)|_{t=k2^{-j}} = f_k.$$

Таким образом, быстрое вычисление ДВП позволяет представить оценку приближенного решения (1.1) в дискретном виде как последовательность коэффициентов $\{a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j,k}^{\tilde{x}_p} : j_0 \leq j \leq J, k \in \mathbb{Z}\}$ по которым раскладывается $\tilde{x}_p(t)$ в (6.7).

Как показано выше в (6.1), оценка полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$, определяемая обработкой наблюдаемого сигнала $y(t)$ фильтром с частотным откликом $\hat{D}^{-1}(\omega)$, соответствует вейвлет-разложению наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базису $\xi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ на самом точном масштабе J . Аналогичным образом получим разложение $\hat{x}_p(t)$ в виде ДВП, умножая слева и справа выражение (6.8) на $\hat{D}(\omega)$.

$$\hat{D}(\omega) \hat{x}_p(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\varphi}_{j_0}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j_0}}} + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^{\tilde{x}_p} \hat{D}(\omega) \hat{\psi}_j(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^j}}. \quad (6.13)$$

С учетом (4.5) и (4.6) имеем

$$\hat{y}(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^y \hat{\xi}_{j_0}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j_0}}} + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^y \hat{\gamma}_j(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^j}}. \quad (6.14)$$

Следовательно, коэффициенты $\{a_{j+1,k}^{\tilde{x}_p}, b_{j+1,k}^{\tilde{x}_p} : k \in \mathbb{Z}\}$ получаются при разложении наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисной системе функций $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $j_0 \leq j \leq J$, в котором $a_{j_0,k}^y = a_{j_0,k}^{\tilde{x}_p}$, $b_{j,k}^y = b_{j,k}^{\tilde{x}_p}$.

Таким образом, оценка приближенного решения (1.1) будет определяться следующим разложением по базисам $\varphi_{j_0,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $j_0 \leq j \leq J$

$$\hat{x}_p(\omega) = \sum_k a_{j_0,k}^y \hat{\varphi}_{j_0}(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^{j_0}}} + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^y \hat{\psi}_j(\omega) e^{-ik \frac{\omega}{2^j}}$$

или

$$\tilde{x}_p(t) = \sum_k a_{j_0,k}^y \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^J \sum_k b_{j,k}^y \psi_{j,k}(t), \quad (6.15)$$

где $\{a_{j_0,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J\}$ — коэффициенты разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по частотно-модифицированным биортогональным вейвлетам $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, $j_0 \leq j \leq J$.

Поскольку предложенная и обоснованная биортогональная система функций $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ и $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ порождает КМА (нестационарный по отношению к масштабу), то для эффективного решения задачи (1.1) по оценке полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ искаженного импульсной характеристикой $\lambda(t)$ необходимо разработать алгоритм быстрого вычисления вейвлет-коэффициентов $\{a_{j_0,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}, j_0 \leq j \leq J\}$ исходя из полученных ранее масштабирующих уравнений (5.2), (5.5), (5.8), (5.11), (5.21), (5.28), (5.34), (5.36), (5.58), (5.62), (5.66), (5.70), а также масштабирующих и вейвлет фильтров $\{h\}$, $\{g\}$, $\{\theta_j\}$, $\{\eta_j\}$, $\{\tilde{\theta}_j\}$, $\{\tilde{\eta}_j\}$, $\{\tilde{h}_j^\xi\}$, $\{\tilde{g}_j^\xi\}$, $\{\tilde{h}_j^\zeta\}$, $\{\tilde{g}_j^\zeta\}$. После чего провести эффективное подавление шума и компенсировать его бесконечное усиление с использованием математических подходов обработки вейвлет-коэффициентов [13–21, 51,52].

Разработанные частотно-модифицированные биортогональные вейвлеты позволяют получить рекурсивные алгоритмы для вычисления коэффициентов ДВП с учетом локализации и компенсации частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$ за счет существования масштабирующих уравнений (5.2), (5.5), (5.8), (5.11), (5.21), (5.28), (5.34), (5.36), (5.58), (5.62), (5.66), (5.70). Масштабирующие уравнения (5.58), (5.62), (5.66), (5.70) позволяют осуществлять переходы при вейвлет-разложении наблюдаемого сигнала $y(t)$ от базиса $\xi_{j+1,k}(t)$ к базисам $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ или от базиса $\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)$ к базисам $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ (следующий уровень разложения выполняется по биортогональному базису) в рамках единого ДВП в необходимых частотных диапазонах, где свойства вейвлет-базисов $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ или $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ позволяют лучшим образом аппроксимировать сигнал $y(t)$. Тем самым в едином алгоритме ДВП становится возможно оптимизировать процесс

получения коэффициентов вейвлет-разложения для дальнейшей их обработки с целью эффективного восстановления сигнала $x(t)$, подавления шума и компенсации его бесконечного усиления.

Для масштабирующих функций подпространства \mathbf{U}_j и соответствующих вейвлет-функций подпространства \mathbf{S}_j справедливы масштабирующие соотношения (5.2), (5.8), (5.21), (5.28), (5.62), (5.70), а для подпространств $\tilde{\mathbf{U}}_j$ и $\tilde{\mathbf{S}}_j$ масштабирующие соотношения (5.5), (5.11), (5.34), (5.36), (5.58), (5.66).

Коэффициенты разложения $\{a_{j,k}^y, b_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ в (6.15) при произвольном значении масштаба j определяются по формулам [13–21]

$$a_{j,k}^y = (y(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)), \quad (6.16)$$

$$b_{j,k}^y = (y(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)). \quad (6.17)$$

Рекурсивные алгоритмы для вычисления этих коэффициентов можно получить подставляя в (6.16), (6.17) вместо $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ их масштабирующие соотношения (5.5), (5.11), (5.34), (5.36), (5.58), (5.66).

Тогда, воспользовавшись (5.5), (5.11), получим

$$a_{j,n}^y = \sum_k h_{k-2n} a_{j+1,k}^y, \quad (6.18)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k g_{k-2n} a_{j+1,k}^y. \quad (6.19)$$

Из масштабирующих уравнений (5.2), (5.8), (5.21), (5.28), (5.34), (5.36), (5.58), (5.62), (5.66), (5.70) также следует, что возможны другие рекурсивные алгоритмы вычисления как коэффициентов разложения $\{a_{j_0,k}^y, b_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, так и коэффициентов разложения $y(t)$ по биортогональным к этим базисам функциям $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$.

Введем обозначения для коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ при произвольном масштабе j

$$\tilde{a}_{j,k}^y = (y(t), \tilde{\xi}_{j,k}(t)), \quad (6.20)$$

$$\tilde{b}_{j,k}^y = (y(t), \tilde{\gamma}_{j,k}(t)), \quad (6.21)$$

а для коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по исходным вейвлет-базисам $\varphi_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$

$$c_{j,k}^y = (y(t), \varphi_{j,k}(t)), \quad (6.22)$$

$$d_{j,k}^y = (y(t), \psi_{j,k}(t)). \quad (6.23)$$

Следовательно, из (5.34), (5.36) получим

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (6.24)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (6.25)$$

исходя из (5.58), (5.66), имеем

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j+1,k}^y, \quad (6.26)$$

$$b_{j,n}^y = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j+1,k}^y. \quad (6.27)$$

Рекурсивный алгоритм для вычисления коэффициентов разложения $\{\tilde{a}_{j_0,k}^y, \tilde{b}_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ наблюдаемого сигнала $y(t)$ по базисным функциям $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ представляется аналогично рассмотренным выше случаям следующим образом:

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k h_{k-2n} \tilde{a}_{j+1,k}^y, \quad (6.28)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k g_{k-2n} \tilde{a}_{j+1,k}^y. \quad (6.29)$$

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (6.30)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} c_{j+1,k}^y, \quad (6.31)$$

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j+1,k}^y, \quad (6.32)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j+1,k}^y. \quad (6.33)$$

Как и в случае традиционного КМА, полученные рекурсивные алгоритмы для вычисления коэффициентов $\{a_{j_0,k}^y, b_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ или $\{\tilde{a}_{j_0,k}^y, \tilde{b}_{j_0,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$, требуют чтобы были известны соответствующие начальные значения коэффициентов разложения $a_{j,k}^y$ или $\tilde{a}_{j,k}^y$ при самом точном масштабе J . Для вычисления начальных

коэффициентов $\{a_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ по известным отсчетам наблюдаемого сигнала $y(t)$ подставим в (6.16) масштабирующее соотношение (5.34)

$$\begin{aligned} a_{j,n}^y &= (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) = \int y(t) \overline{\tilde{\xi}_{j,n}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \overline{\hat{\xi}_j(\omega)} e^{-i\omega \frac{n}{2^j}} d\omega = \\ &= \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} \frac{1}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \overline{\hat{\phi}_{j+1}(\omega)} e^{-i\omega \frac{k}{2^{j+1}}} d\omega \approx \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} \frac{\hat{\phi}_{j+1}(0)}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) e^{-i\omega \frac{k}{2^{j+1}}} d\omega. \end{aligned}$$

Откуда следует, что при выборе вейвлет-системы Кравченко

$$a_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\theta}_{j+1,k-2n} y_k. \quad (6.34)$$

Подобным образом из (6.17) и (5.36) получим

$$b_{j,n}^y = (y(t), \tilde{\gamma}_{j,n}(t)) = \int y(t) \overline{\tilde{\gamma}_{j,n}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) \overline{\hat{\gamma}_j(\omega)} e^{-i\omega \frac{n}{2^j}} d\omega \approx \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} \frac{\hat{\phi}_{j+1}(0)}{2\pi} \int \hat{y}(\omega) e^{-i\omega \frac{k}{2^{j+1}}} d\omega,$$

откуда, при выборе вейвлет-системы Кравченко

$$b_{j,n}^y = \sum_k \tilde{\eta}_{j+1,k-2n} y_k. \quad (6.35)$$

Аналогично вычисляются начальные коэффициенты $\{\tilde{a}_{j,k}^y : k \in \mathbb{Z}\}$ по известным отсчетам наблюдаемого сигнала $y(t)$ с использованием (5.21) и (6.20), (5.28) и (6.21)

$$\tilde{a}_{j,n}^y = \sum_k \theta_{j+1,k-2n} y_k, \quad (6.36)$$

$$\tilde{b}_{j,n}^y = \sum_k \eta_{j+1,k-2n} y_k. \quad (6.37)$$

Таким образом, воспользовавшись формулами (6.18), (6.19), (6.24) — (6.37) можно получить различные варианты рекурсивного алгоритма разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по его отсчетам от более точного разрешения J к грубому разрешению j_0 . Для вычисления каждого последующих коэффициентов из предыдущих с большим масштабом, характеризующим более широкополосный процесс, лучше использовать базисные функции и их масштабирующие и вейвлет-фильтры в (6.18), (6.19), (6.24) — (6.37), которые учитывают и компенсируют частотно-временные особенности наблюдаемого сигнала $y(t)$ и частотных функций $\hat{\lambda}(\omega), \hat{D}(\omega)$ в соответствующем диапазоне. Схема одного из возможных алгоритмов вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ показана на рис. 6.2(a).

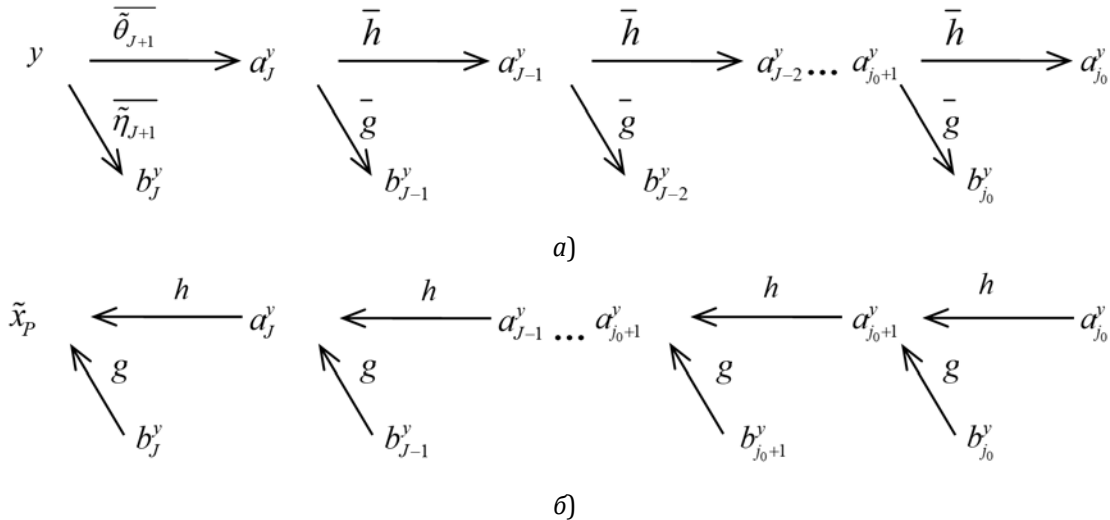


Рис. 6.2. Схемы разложения (а) наблюдаемого сигнала $y(t)$ и последующего восстановления (б) полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по базису частотно-модифицированных вейвлет-функций.

В отличие от классической схемы вейвлет-разложения [13–21] отсчеты наблюдаемого сигнала $y(t)$ в первом каскаде обрабатываются низкочастотным и высокочастотным фильтрами $\{\tilde{\theta}_{j+1}\}, \{\tilde{\eta}_{j+1}\}$. Фильтры на последующих этапах обработки не изменяются.

Далее получим рекурсивный алгоритм восстановления аппроксимирующих коэффициентов, характеризующих низкочастотную составляющую сигнала с большим масштабом, из коэффициентов вейвлет-разложения меньшего масштаба (один уровень обратного дискретного вейвлет преобразования).

Тогда, учитывая, что $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$ масштабирующую функцию $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде суммы

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \tilde{\gamma}_{j,n}(t). \quad (6.38)$$

Умножая (6.38) скалярно слева и справа на $y(t)$ получим

$$(y(t), \tilde{\xi}_{j+1,k}(t)) = \sum_n h_{k-2n} (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) + \sum_n g_{k-2n} (y(t), \tilde{\gamma}_{j,n}(t)),$$

что соответствует следующему представлению коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y$

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} a_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} b_{j,n}^y \quad (6.39)$$

Отметим, что в данном случае суммирование производится по другим переменным по сравнению с формулами (6.18), (6.19), (6.24), (6.25), (6.34), (6.36).

Таким образом, по формуле (6.39) получен рекурсивный алгоритм восстановления оценки $\tilde{x}_p(t)$ по коэффициентам вейвлет-разложения от грубого к точному разрешению с использованием фильтров исходных вейвлет-базисов $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$. Схема восстановления отсчетов оценки $\tilde{x}_p(t)$ не отличается от схемы классического КМА (см. рис. 6.2(б)).

Благодаря предложенному и обоснованному конструктивному подходу получения частотно-модифицированных вейвлет-базисов схема разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ и восстановления коэффициентов вейвлет-разложения оценки $\tilde{x}_p(t)$ не единственная. В схеме разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ могут использоваться другие рекурсивные формулы (6.26) — (6.37). По полученным в результате коэффициентам вейвлет-разложения также как с помощью (6.39) должна быть восстановлена оценка $\tilde{x}_p(t)$.

Для подпространств \mathbf{U}_{j+1} и $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1}$ масштабирующих функций $\xi_{j+1,k}(t)$ и $\tilde{\xi}_{j+1,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, соответственно, справедливы ортогональные разложения $\mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$, $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j \oplus \tilde{\mathbf{S}}_j$, $\tilde{\mathbf{U}}_{j+1} = \mathbf{U}_j \oplus \mathbf{S}_j$. Тогда масштабирующие функции $\xi_{j+1,k}(t)$, $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде сумм

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \xi_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \gamma_{j,n}(t), \quad (6.40)$$

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (6.41)$$

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \xi_{j,n}(t) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \gamma_{j,n}(t). \quad (6.42)$$

Умножая левые и правые части уравнений (6.40)-(6.42) скалярно на $y(t)$ получим следующие рекурсивные формулы восстановления аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y$, $\tilde{a}_{j+1,k}^y$:

$$(y(t), \xi_{j+1,k}(t)) = \sum_n h_{k-2n} (y(t), \xi_{j,n}(t)) + \sum_n g_{k-2n} (y(t), \gamma_{j,n}(t))$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{j+1,k}^y &= \sum_n h_{k-2n} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} \tilde{b}_{j,n}^y, \quad (6.43) \\ (y(t), \xi_{j+1,k}(t)) &= \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \tilde{\gamma}_{j,n}(t)) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{j+1,k}^y &= \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j,n}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} b_{j,n}^y, \quad (6.44) \\ (y(t), \tilde{\xi}_{j+1,k}(t)) &= \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \xi_{j,n}(t)) + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \gamma_{j,n}(t)) \end{aligned}$$

или

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n \tilde{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j,k}^y + \sum_n \tilde{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{b}_{j,k}^y. \quad (6.45)$$

Таким образом, с использованием рекурсивных соотношений (6.39) и (6.43) можно восстанавливать коэффициенты разложения большего масштаба по коэффициентам разложения того же базиса меньшего масштаба, а с помощью соотношений (6.44) и (6.45) восстанавливаются коэффициенты разложения большего масштаба по коэффициентам разложения биортогонального базиса меньшего масштаба.

Кроме этого, возможны смешанные рекурсивные соотношения, где коэффициенты разложения большего масштаба получаются из коэффициентов разложения по масштабирующим функциям той же или биортогональной вейвлет-системы и вейвлет-функциям биортогональной или той же вейвлет-системы при меньшем масштабе. Действительно, если записать (6.38) для $k = 0$ в частотной области

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

а затем воспользоваться (4.23), (4.24) и (5.47), (5.51), то получим

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \frac{H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \hat{\xi}_j(\omega) + G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega) = \check{H}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

и

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + \frac{G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}{E_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)} \hat{\gamma}_j(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + \check{G}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega).$$

Во временной области полученные выше равенства преобразуются к следующему виду при произвольном значении индекса сдвига k :

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \xi_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (6.46)$$

$$\tilde{\xi}_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \gamma_{j,n}(t). \quad (6.47)$$

Аналогичным образом, представив (6.41) в частотной области получим

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \check{H}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + \check{G}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

а воспользовавшись (4.23), (4.24) и (5.49), (5.53), имеем

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + \check{G}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega),$$

$$\hat{\xi}_{j+1}(\omega) = \check{H}_{j+1}^{\xi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\xi}_j(\omega) + G\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right) \hat{\gamma}_j(\omega).$$

Во временной области полученные выше равенства преобразуются к следующему виду при произвольном значении индекса сдвига k :

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n h_{k-2n} \xi_{j,n}(t) + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\gamma}_{j,n}(t), \quad (6.48)$$

$$\xi_{j+1,k}(t) = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{\xi}_{j,n}(t) + \sum_n g_{k-2n} \gamma_{j,n}(t). \quad (6.49)$$

Умножая левые и правые части уравнений (6.46)-(6.49) скалярно на $y(t)$ получим следующие смешанные рекурсивные формулы восстановления аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{j+1,k}^y, \tilde{a}_{j+1,k}^y$:

$$(y(t), \tilde{\xi}_{j+1,n}(t)) = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \xi_{j,k}(t)) + \sum_n g_{k-2n} (y(t), \tilde{\gamma}_{j,n}(t))$$

или

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{a}_{j,k}^y + \sum_n g_{k-2n} b_{j,n}^y, \quad (6.50)$$

$$(y(t), \tilde{\xi}_{j+1,n}(t)) = \sum_n h_{k-2n} (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \gamma_{j,k}(t))$$

или

$$a_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} a_{j,n}^y + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} \tilde{b}_{j,k}^y, \quad (6.51)$$

$$(y(t), \xi_{j+1,k}(t)) = \sum_n h_{k-2n} (y(t), \xi_{j,n}(t)) + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \tilde{\gamma}_{j,n}(t))$$

или

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n h_{k-2n} \tilde{a}_{j,n}^y + \sum_n \check{g}_{j+1,k-2n}^{\xi} b_{j,n}^y, \quad (6.52)$$

$$(y(t), \xi_{j+1,k}(t)) = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} (y(t), \tilde{\xi}_{j,n}(t)) + \sum_n g_{k-2n} (y(t), \gamma_{j,n}(t))$$

или

$$\tilde{a}_{j+1,k}^y = \sum_n \check{h}_{j+1,k-2n}^{\xi} a_{j,n}^y + \sum_n g_{k-2n} \tilde{b}_{j,n}^y. \quad (6.53)$$

Таким образом, получены рекурсивные формулы для одного уровня ДВП и обратного дискретного преобразования (ОДВП) позволяющие строить гибкие вычислительные схемы кратномасштабной аппроксимации решения интегрального уравнения типа свертки (1.1) с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$.

Возможные схемы вейвлет-анализа для оценки решения $\tilde{x}_p(t)$, использующие полученные формулы разложения и восстановления приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Смешанные схемы вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ и последующего восстановления полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по вейвлет-коэффициентам

№	Обработка	Коэф.	Фильтр	Коэф.	Фильтр	Коэф.	Фильтр	Коэф.	...	Коэф.	Фильтр	Коэф.
1	Разложение	$c_{j+1}^y = y_n$	$\overline{\tilde{\theta}_{j+1}} \rightarrow$	a_j^y	$\overline{h} \rightarrow$	a_{j-1}^y	$\overline{h} \rightarrow$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$a_{j_0}^y$
			$\overline{\tilde{\eta}_{j+1}}$		\overline{g}		\overline{g}				\overline{g}	
	Восстановление	\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow h$	$a_{j_0}^y$
			g		g		g				g	
2	Разложение	$c_{j+1}^y = y_n$	$\overline{\theta_{j+1}} \rightarrow$	\tilde{a}_j^y	$\overline{h} \rightarrow$	\tilde{a}_{j-1}^y	$\overline{h} \rightarrow$	\tilde{a}_{j-2}^y	...	$\tilde{a}_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$\tilde{a}_{j_0}^y$
			$\overline{\eta_{j+1}}$		\overline{g}		\overline{g}				\overline{g}	
	Восстановление	\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow \tilde{h}_{j_0+1}^\zeta$	$\tilde{a}_{j_0}^y$
			\tilde{g}_j^ζ		\tilde{g}_{j-1}^ζ		\tilde{g}_{j-2}^ζ				$\tilde{g}_{j_0+1}^\zeta$	
3	Разложение	$c_{j+1}^y = y_n$	$\overline{\theta_{j+1}} \rightarrow$	\tilde{a}_j^y	$\overline{h_j^\zeta} \rightarrow$	a_{j-1}^y	$\overline{h} \rightarrow$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$a_{j_0}^y$
			$\overline{\eta_{j+1}}$		\overline{g}		\overline{g}				\overline{g}	
	Восстановление	\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow h$	$a_{j_0}^y$
			\tilde{g}_j^ζ		\tilde{g}_{j-1}^ζ		g				g	
4	Разложение	$c_{j+1}^y = y_n$	$\overline{\theta_{j+1}} \rightarrow$	\tilde{a}_j^y	$\overline{h} \rightarrow$	\tilde{a}_{j-1}^y	$\overline{h_{j-1}^\zeta} \rightarrow$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$a_{j_0}^y$
			$\overline{\eta_{j+1}}$		\overline{g}		\overline{g}				\overline{g}	
	Восстановление	\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow h$	$a_{j_0}^y$
			\tilde{g}_j^ζ		\tilde{g}_{j-1}^ζ		\tilde{g}_{j-2}^ζ				g	

Продолжение табл. 6.1.

5	Разложение	$c_{J+1}^y = y_n$	$\overline{\theta}_{J+1} \rightarrow$	a_j^y	$\overline{h} \rightarrow$	a_{j-1}^y	$\overline{h}_{j-1}^c \rightarrow$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$a_{j_0}^y$
			$\overline{\eta}_{J+1}$		\overline{g}_j^c		\overline{g}_{j-1}^c				$\overline{g}_{j_0+1}^c$	
Восстановление		\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow h$	$a_{j_0}^y$
			g		\overline{g}_{j-1}^c		\overline{g}_{j-2}^c				g	
				b_j^y		b_{j-1}^y		b_{j-2}^y	...	$b_{j_0+1}^y$		$b_{j_0}^y$
6	Разложение	$c_{J+1}^y = y_n$	$\overline{\theta}_{J+1} \rightarrow$	a_j^y	$\overline{h}_j^c \rightarrow$	\tilde{a}_{j-1}^y	$\overline{h} \rightarrow$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\overline{h} \rightarrow$	$a_{j_0}^y$
			$\overline{\eta}_{J+1}$		\overline{g}_j^c		g				g	
Восстановление		\tilde{x}_{pn}	$\leftarrow h$	a_j^y	$\leftarrow h$	a_{j-1}^y	$\leftarrow h$	a_{j-2}^y	...	$a_{j_0+1}^y$	$\leftarrow \overline{h}_{j_0+1}^c$	$a_{j_0}^y$
			g		\overline{g}_{j-1}^c		\overline{g}_{j-2}^c				$\overline{g}_{j_0+1}^c$	
				b_j^y		b_{j-1}^y		b_{j-2}^y	...	$b_{j_0+1}^y$		$b_{j_0}^y$

Обобщенная схема, реализующая кратномасштабный алгоритм восстановления оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$, показана на рис. 6.3.

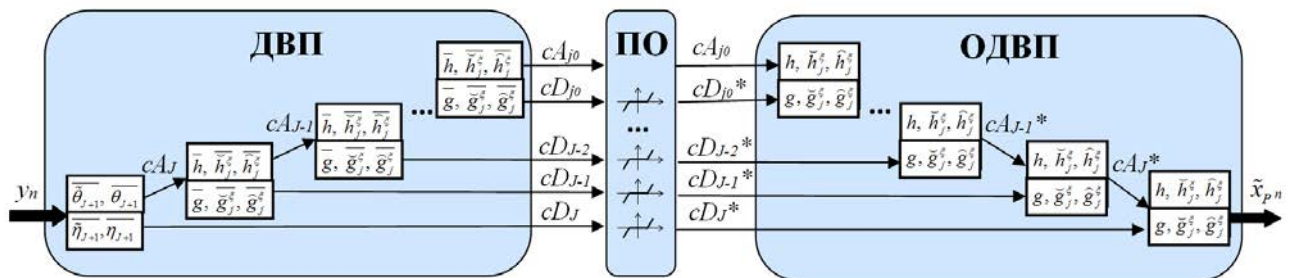


Рис. 6.3. Обобщенная схема, реализующая кратномасштабный алгоритм восстановления оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$.

Полезный сигнал $x(t)$ первоначально искаженный импульсной характеристикой $\lambda(t)$ с последующим действием шума $n(t)$ в виде временных отсчетов $y_n = y(t_n)$ подвергается вейвлет-разложению с использованием низкочастотного фильтра $\{\overline{\theta}_{j+1,k}\}$ (или $\{\overline{\theta}_{j+1,k}\}$) и высокочастотного фильтра $\{\overline{\eta}_{j+1,k}\}$ (или $\{\overline{\eta}_{j+1,k}\}$). В результате получают аппроксимирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cA_j = \{a_j^y\}$ (или $cA_j = \{\tilde{a}_j^y\}$) и детализирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cD_j = \{b_j^y\}$ (или $cD_j = \{\tilde{b}_j^y\}$) масштаба J . Далее каждые аппроксимирующие коэффициенты вейвлет-разложения $cA_j = \{a_j^y\}$ (или $cA_j = \{\tilde{a}_j^y\}$) при $j_0 - 1 \leq j \leq J$ должны быть обработаны низкочастотным фильтром $\{\overline{h}_k\}$ (или $\{\overline{h}_{j,k}^c\}$, либо $\{\overline{h}_{j,k}^c\}$) и высокочастотным фильтром $\{\overline{g}_k\}$ (или $\{\overline{g}_{j,k}^c\}$, либо $\{\overline{g}_{j,k}^c\}$). Таким образом, образуется дискретная последовательность коэффициентов вейвлет-разложения $\{cA_j, cD_j : j_0 \leq j \leq J\}$. Детализирующие коэффициенты $\{cD_j : j_0 \leq j \leq J\}$ впоследствии подвергаются пороговой обработке. После этого, выполняется ОДВП с использованием низкочастотного фильтра $\{h_k\}$ (или $\{\tilde{h}_{j,k}^c\}$, либо $\{\tilde{h}_{j,k}^c\}$) и высокочастотного фильтра $\{g_k\}$ (или $\{\tilde{g}_{j,k}^c\}$, либо $\{\tilde{g}_{j,k}^c\}$). При этом схема вейвлет-восстановления должна обеспечивать решение интегрального уравнения (1.1).

Таким образом, получение оценки полезного сигнала \tilde{x}_p при помощи кратномасштабного алгоритма с использованием новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов проводится в несколько этапов.

1. Выбор частотной модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$.

На этом этапе для выбора частотной модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$ учитывается априорная информация о полезном и наблюдаемом сигнале $x(t)$, $y(t)$, импульсной характеристике $\lambda(t)$, параметрах шума $n(t)$.

На практике для подавления бесконечного усиления шума используют фильтр, регуляризирующий усиление на высоких частотах (1.7), который может быть использован при построении функции $\hat{D}(\omega)$ в виде $\hat{D}(\omega) = \hat{K}(\omega)^{-1}$. Подавление бесконечного усиления шума также может быть достигнуто применением оконной функции $w(\omega)$, в том числе масштабирующей функции $\hat{\varphi}_j(\omega)$, которая при самом точном разрешении J должна удовлетворять следующим требованиям:

- бесконечный рост высокочастотной части спектра $\hat{\lambda}(\omega)^{-1}$ должен быть скомпенсирован убыванием высокочастотной части масштабирующей функции;
- спектр масштабирующей функции $\hat{\varphi}_j(\omega)$ в пределах спектральной полосы $\hat{y}(\omega)$ должен быть максимально плоским;
- масштабирующая функция $\hat{\varphi}_j(\omega)$ должна быть достаточно гладкая для устранения эффекта Гиббса (как можно большее число раз непрерывно дифференцируемой).

Указанными свойствами обладают масштабирующие функции из вейвлет-систем Кравченко [25–28].

Дополнительно частотная характеристика системы может быть подвергнута коррекции. Для этого функцию $\hat{D}(\omega)$ необходимо умножить на подходящий полином от ω .

2. Выбор ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi(t)$, $\psi(t)$ с оптимальными свойствами.

Для достижения большей точности и получения вычислительных преимуществ вейвлет-базис должен обладать финитным спектром, малым числом коэффициентов фильтров $\{h_k\}$, $\{g_k\}$, непрерывной дифференцируемостью как можно большее число раз. Такими свойствами обладают масштабирующие функции из вейвлет-систем Кравченко [25–28].

Исходя из частотно-временных свойств выбранного вейвлет-базиса определяются значения масштабов $J \geq j \geq j_0$, при которых должно быть выполнено ДВП.

3. Получение биортогональной частотно-модифицированной вейвлет-системы $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$, $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$.

Первоначально из выбранного ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$ и модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$ должны быть получены функции $\xi_{j,k}(t)$, $\gamma_{j,k}(t)$ по формулам (4.5), (4.6). Далее вводится функция $E_j^\xi(\omega)$ по формуле (4.22), с использованием которой строятся биортогональные вейвлет-базисы $\tilde{\xi}_{j,k}(t)$, $\tilde{\gamma}_{j,k}(t)$ согласно (4.23), (4.24). Дополнительно, модифицирующая функция $\hat{D}(\omega)$ может быть подвергнута частотной коррекции.

4. Расчет дискретных фильтров новой биортогональной частотно-модифицированной вейвлет-системы.

Для проведения прямого ДВП наблюдаемого сигнала $y(t)$ и получения оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ с помощью ОДВП известные дискретные фильтры $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ ортонормированного вейвлет-базиса $\varphi(t)$, $\psi(t)$, дополняются расчетом следующих фильтров:

- по формулам (5.22), (5.27), (5.33), (5.38) вычисляются коэффициенты фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k}\}$ и $\{\theta_{j+1,k}\}$, $\{\eta_{j+1,k}\}$, которые определяют первый уровень ДВП;
- по формулам (5.56), (5.60), (5.65), (5.69) вычисляются коэффициенты фильтров $\{\tilde{h}_{j,k}^\xi\}$, $\{\tilde{g}_{j,k}^\xi\}$ и $\{\tilde{h}_{j,k}^\xi\}$, $\{\tilde{g}_{j,k}^\xi\}$, которые наряду с $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ могут применяться в расчете последующих уровней ДВП и в ОДВП. Следует отметить, что коэффициенты этих фильтров не требуют расчета обратного преобразования Фурье для каждого разрешения. Они вычисляются дискретной сверткой известных коэффициентов фильтров $\{h_k\}$, $\{g_k\}$ с предварительно рассчитанной последовательностью коэффициентов $2^{j+2}\pi$ -периодической функции $E_{j+1}^\xi(\omega)$ и обратной к ней функции $1/E_{j+1}^\xi(\omega)$, соответственно, $\{c_{j+1,n}\}$, $\{\tilde{c}_{j+1,n}\}$. При этом коэффициенты $\{\tilde{c}_{j+1,n}\}$ могут быть вычислены из коэффициентов $\{c_{j+1,n}\}$.

Таким образом, наибольших вычислительных затрат требует однократное вычисление коэффициентов фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k}\}$ и $\{\theta_{j+1,k}\}$, $\{\eta_{j+1,k}\}$.

5. Получение начальных коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$.

На первом этапе разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ производится вычисление коэффициентов $\{a_{j,n}^y, b_{j,n}^y : n \in \mathbb{Z}\}$ или $\{\tilde{a}_{j,n}^y, \tilde{b}_{j,n}^y : n \in \mathbb{Z}\}$ с помощью дискретных фильтров $\{\tilde{\theta}_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\tilde{\eta}_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ или, соответственно, $\{\theta_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\eta_{j+1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ по формулам (6.34)-(6.37). Указанные фильтры получены в частотной области по формулам (5.19), (5.25), (5.31), (5.36) и учитывают особенности модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$, которая может значительно возрастать в области высоких частот. При этом из (5.19), (5.25), (5.31), (5.36) следует, что частотные фильтры $\tilde{\Theta}_j(\omega)$, $\tilde{N}_j(\omega)$ (или $\Theta_j(\omega)$, $N_j(\omega)$, в зависимости от выбора $\hat{D}(\omega)$) могут обеспечивать рост частотных составляющих обрабатываемого сигнала при $\hat{\lambda}(\omega) \rightarrow 0$ (в полосе частот наблюдаемого сигнала $\hat{y}(\omega)$), если эти особенности недостаточно скомпенсированы соответствующим выбором $\hat{D}(\omega)$. В частности, может значительно увеличиваться высокочастотная составляющая сигнала, содержащая основной шум. Фильтры $\Theta_j(\omega), N_j(\omega)$ (или $\tilde{\Theta}_j(\omega), \tilde{N}_j(\omega)$, в зависимости от выбора $\hat{D}(\omega)$) напротив, не усиливают такие частотные компоненты обрабатываемого сигнала, и могут служить альтернативным подходом для расчета коэффициентов разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ на первом этапе ДВП. Последующие этапы ДВП проводятся фильтрами с меньшей полосой пропускания, где в высокочастотной части рост модифицирующей функции $\hat{D}(\omega)$ как правило существенно меньше. Поэтому последующие этапы ДВП чаще всего менее критичны к выбору фильтров разложения.

6. ДВП наблюдаемого сигнала $y(t)$.

В ходе ДВП подбирается оптимальная схема вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y(t)$ по формулам (6.18), (6.19), (6.26)-(6.29), (6.32), (6.33) при выбранных значениях масштабов $J \geq j \geq j_0$ с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Процедуры по вычислению дискретных фильтров для реализации ДВП и ОДВП рассмотрены выше.

На практике также применяется избыточное ДВП (вейвлет-коэффициенты не отбрасываются в результате децимации), при котором может достигаться лучшее подавление шума.

7. Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов.

Процесс очистки наблюдаемого сигнала от шума с помощью вейвлетов может быть выполнен пороговой обработкой вейвлет-коэффициентов [13-21,51,52]. Достоинство нелинейных методов пороговой обработки вейвлет-коэффициентов состоит в скорости алгоритмов построения оценок; возможности лучшей адаптации к функциям, имеющим на разных участках различную степень регулярности. Помимо задачи удаления шума, пороговая обработка позволяет решить задачу сжатия сигнала.

При пороговой обработке проводится ограничение уровня детализирующих коэффициентов с использованием пороговой функции $p_T(x)$. Вместо аргумента x в функцию $p_T(x)$ подставляются детализирующие коэффициенты для каждого уровня разложения j (cD_j , $j_0 \leq j \leq J$).

Обычно применяется функция жёсткой или мягкой пороговой обработки с порогом T . Функция жёсткой пороговой обработки описывается следующим выражением:

$$p_T(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| > T, \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Очевидно, что функция жесткой пороговой обработки имеет разрыв, что может привести к нежелательным особенностям обработки достаточно гладкой функции сигнала. Мягкая пороговая обработка задается непрерывной пороговой функцией

$$p_T(x) = \begin{cases} x - T & \text{при } x > T, \\ x + T & \text{при } x < -T, \\ 0 & \text{при } |x| \leq T. \end{cases}$$

Вид функций жёсткой и мягкой пороговой обработки показан на рис. 6.4.

Следовательно, при таком подходе наиболее эффективное удаление шума будет достигаться, когда энергия сигнала в результате ДВП сосредоточена в минимальном числе коэффициентов выше порогового уровня, а энергия шума распределена в максимальном числе коэффициентов ниже порогового уровня. Это происходит, когда выбранный вейвлет-базис хорошо коррелирован с сигналом.

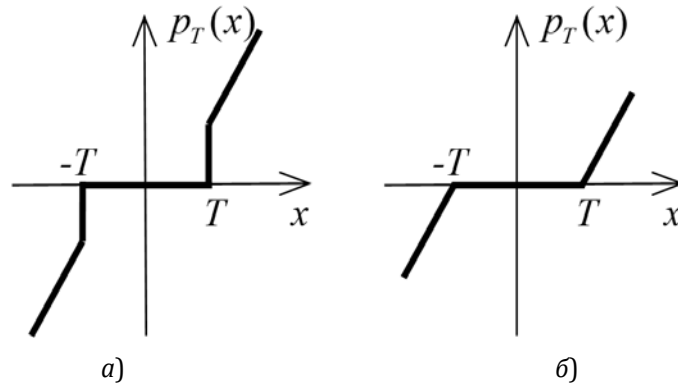


Рис. 6.4. Функции жесткой (а) и мягкой (б) пороговой обработки.

Для каждого масштаба j выбирается порог T_j , который в соответствии с [51,52] определяется так

$$T_U = \sigma \sqrt{2 \ln N}.$$

Этот порог получил название «универсальный», так как он не зависит от наблюдаемых данных (зависит только от дисперсии шума). При выборе порога T_U обеспечивается близость среднеквадратического риска к минимальному [51–54], а из сигнала удаляется почти весь шум.

На практике дисперсия шума σ^2 может быть вычислена при помощи калибровочной процедуры устройства регистрации сигнала. Однако зачастую дисперсия σ^2 неизвестна и вместо ее точного значения необходимо использовать некоторую оценку σ_0^2 . Оценка дисперсии может быть получена по наблюдаемым данным $y_n = y(t_n)$ путем вычисления медианы M_b вейвлет-коэффициентов cD_j на самом точном масштабе J , так как в силу (6.35) (или (6.37)) эти коэффициенты фактически содержат только шум

$$\sigma_0 = \frac{M_b}{0.6745}.$$

Кроме этого, в качестве дисперсии σ_0^2 может быть использована выборочная дисперсия. Выборочная дисперсия является самой популярной оценкой величины σ_0^2 , а в случае отсутствия выбросов, она наиболее предпочтительна. Тогда, если сигнал y_n длины N , имеет $N/2$ вейвлет-коэффициентов cD_j наименьшего масштаба $j = J - 1$, то σ_0^2 оценивается следующим образом:

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{N} \sum_{n=N/2+1}^N y_n^2 - \bar{y}^2, \text{ где } \bar{y} = \frac{2}{N} \sum_{n=N/2+1}^N y_n.$$

8. Восстановление оценки полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ с использованием ОДВП.

В ходе ОДВП проводится восстановление дискретных значений оценки сигнала $\tilde{x}_{p,n} = \tilde{x}_p(t_n)$ по коэффициентам вейвлет-разложения наблюдаемого сигнала $y_n = y(t_n)$ прошедшим пороговую обработку. Так как при заданных аппроксимирующих и детализирующих коэффициентах на каждом масштабе j ($J \geq j \geq j_0$) возможно восстанавливать аппроксимирующие коэффициенты $\{a_{j+1}^y\}$ или $\{\tilde{a}_{j+1}^y\}$ в зависимости от фильтров в формулах (6.39), (6.43) — (6.45), (6.50) — (6.53), то следующий этап ОДВП может быть проведен с учетом частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. При этом на последнем этапе восстановления должны применяться формулы, обеспечивающие восстановление $\tilde{x}_{p,n}$.

9. Визуализация и интерпретация результатов. Оценка погрешности решения задачи.

Полученный результат визуализируется и подвергается дальнейшей обработке (статистической, сравнительной, эмпирической и т.д.) с целью получения более полной информации о предмете исследования и оценки погрешности решения задачи.

Выводы

В работе обосновано применение вейвлетных подходов к оценке приближенного решения интегрального уравнения типа свертки (1.1). Для реализации алгоритма решения задачи (1.1), предлагается использовать ортогональные вейвлеты Кравченко с финитным спектром [25–28].

Показано, что можно выполнить модификацию вейвлетов с компактным носителем в частотной области таким образом, чтобы стало возможным проводить оценку полезного сигнала $\tilde{x}_p(t)$ по наблюдаемому сигналу $y(t)$ в рамках быстрых вычислительных алгоритмов на основе ДВП. Предложен и обоснован спо-

соб получения новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов формирующих две цепочки КМА на основе модифицирующей функции с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Функция $\hat{D}(\omega)$ позволяет осуществлять построение вейвлетов с учетом стабилизации решения интегрального уравнения типа свертки (1.1) и эффективного подавления шума.

Получено несколько видов масштабирующих уравнений и формулы вычисления вейвлет-коэффициентов для этих уравнений. Предлагаемые биортогональные частотно-модифицированные вейвлеты нестационарны по отношению к масштабу. При этом они формируют эффективный кратномасштабный алгоритм аппроксимации решения интегрального уравнения типа свертки (1.1). Эти вейвлетные системы позволяют при ДВП, ОДВП оптимизировать процесс получения и восстановления вейвлет-коэффициентов с точки зрения компенсации частотно-временных особенностей наблюдаемого сигнала $y(t)$, частотной функции отклика $\hat{\lambda}(\omega)$ или фильтра с частотным откликом $\hat{D}(\omega)$. Предложены несколько вариантов ДВП и ОДВП на основе новых биортогональных частотно-модифицированных вейвлетов, которые можно использовать на практике. Приведен алгоритм кратномасштабной аппроксимации решения интегрального уравнения типа свертки.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач / М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / Киев: Наук. думка, 1978.
4. Сизиков В. С. Интегральные уравнения и MatLab в задачах томографии, иконики и спектроскопии / Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011. 252 с.
5. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. Учебное пособие для вузов / СПб.: Политехника, 2003. 261 с. ISBN: 5-7325-0761-2.
6. Сизиков В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab / СПб.: Лань, 2017. 412 с. ISBN: 978-5-8114-2754-3
7. Сизиков В. С. Обратные прикладные задачи и MatLab / СПб.: Лань, 2011. ISBN: 978-5-8114-1238-9
8. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов / СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 768 с. ISBN: 978-5-9775-0606-9.
9. Оптенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов / М.: Техносфера, 2006. 855 с. ISBN: 978-5-94836-202-1.
10. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений / М.: Советское радио, 1979.
11. Френкс Л. Теория сигналов / М.: Советское радио, 1974. 171 с.
12. Бумагин А. В., Гондарь А. В., Стешенко В. Б., Калашников К. С., Прудников А. А. Характеристики декоррелирующих преобразований для задачи сжатия изображений // Компоненты и технологии. 2010. Т. 105. № 4. С. 113–116.
13. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / М.: Мир, 2005.
14. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
15. Чуи К. Введение в вейвлеты / М.: Мир, 2001.
16. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков / М.: Физматлит, 2006. 615 с. ISBN: 5-9221-0642-2.
17. Блаттер К. Вейвлет анализ. Основы теории / М.: Техносфера, 2004. 271 с. ISBN: 5-94836-033-4.
18. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / М.: ДМК Пресс, 2014. 628 с. ISBN: 978-5-94074-955-4.
19. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет преобразования / СПб.: ВУС, 1999. 204 с.
20. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике / М.: СОЛОН-Р, 2002.
21. Штарк Г. Г. Применение вейвлетов для ЦОС / М.: Техносфера. 2007. 183 с. ISBN: 978-5-94836-108-6.
22. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ / М.: Физматлит, 2003.
23. Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б. Фильтрации сигналов и изображений: Фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad) // Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). 2010. 188 с. ISBN: 978-5-7795-0519-2.
24. Donoho, D., Johnstone, I. Ideal Spatial Adaptation Via Wavelet Shrinkage // Biometrika. 1994. Vol. 81. P. 425–455. DOI: 10.1093/Biomet/81.3.425
25. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В. Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники / М.: Техносфера, 2018. ISBN 978-5-94836-518-3
26. Кравченко В. Ф., Чуриков Д. В. Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами / М.: Техносфера, 2019. Дополнительный тираж. ISBN 978-5-94836-506-0
27. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А. В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиопизики. Часть II // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 2. С. 109–148. DOI: 10.7868/S0033849414090046
28. Кравченко В. Ф., Юрин А. В. Новый класс вейвлет-функций в цифровой обработке сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Т. 13. № 5. С. 3–64.
29. Neelamani, R., Choi, H., and Baraniuk, R. ForWaRD: Fourier-Wavelet Regularized Deconvolution for Ill-Conditioned // IEEE Transactions on Signal Processing. 2004. Vol. 52. No. 2. P. 418–433. DOI: 10.1109/TSP.2003.821103.
30. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям / М.: Радиотехника, 2003. ISBN: 978-5-93108-019-2.
31. Кравченко В. Ф., Рвачёв В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / М.: Физматлит, 2006. 416 с. ISBN: 5-9221-0752-6.
32. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн / М.: Сайнс-Пресс, 2005.
33. Кравченко В. Ф., Кравченко О. В., Пустовойт В. И., Чуриков Д. В., Юрин А. В. Применение семейств атомарных, WA-систем и R-функций в современных проблемах радиопизики. Часть IV // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 11. С. 1113–1152. DOI: 10.7868/S0033849415110078.

34. Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В., Юрин А.В. Аналитическое описание локусов сложной формы R-операциями и атомарными функциями. Цифровая обработка сигналов и изображений // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Т. 13. № 5. С. 3–64.
35. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. Новые конструкции одномерной и двумерной обобщенных теорем Кравченко-Котельникова на основе атомарных функций $up(t)$ // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 9. С. 971–976. DOI: 10.7868/S003384941309009X.
36. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. Особенности численного дифференцирования функций одной и двух переменных на основе нового класса вейвлетов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2008. Т. 13. № 8. С. 12–30.
37. Кравченко В.Ф., Юрин А.В. Применение теории R-функций и вейвлетов к решению краевых задач эллиптического типа // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т. 14. № 3. С. 4–39.
38. Ачильдиев В.М., Басараб М.А., Бедро Н.А., Грузевич Ю.К., Лунин В.А., Матвеев В.А., Солдатенков В.А., Тимошенко С.П., Чаплыгин Ю.А., Юрин А.В. Методы первичной цифровой обработки сигналов микромеханического волнового твердотельного гироскопа // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2011. Т. 9. № 2. С. 39–55.
39. Ziemer, W.P. Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Function of Bounded Variation. // IEEE New York: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 978–1–4612–6985–4
40. Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том I. Общая теория. Том II. Специальные пространства / М.: Физический факультет МГУ. 2016. 259 с.
41. Фалалеев М.В. Обобщенные функции и действия над ними: Учебно-методическое пособие / М.: Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2011. 106 с. ISBN: 978–5–9624–0503–2
42. Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D., and Tsybakov, A. Wavelets, Approximation, and Statistical Applications // IEEE New York: Springer, 1998. ISBN-13: 978–0–387–98453–7.
43. Трибель Х. Теория функциональных пространств / М.: Мир. 1986.
44. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие / М.: СПб.: Издательство ООО «МОДУС+». 1999. 152 с.
45. Donoho, D. L. Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-Vaguelette Decomposition // Applied and Computational Harmonic Analysis. 1995. Vol. 2. No. 2. P. 101–126. DOI: 10.1006/Acha.1995.1008
46. Abramovich, F., Silverman, B. Wavelet Decomposition Approaches to Statistical Inverse Problems // Biometrika. 1998. Vol. 85. № 1. P. 115–129. DOI: 10.1093/Biomet/85.1.115.
47. Neelamani, R., Choi, H., and Baraniuk, R. Wavelet-Based Deconvolution for Ill-Conditioned Systems // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1999. Vol. 6. P. 3241–3244. DOI: 10.1109/ICASSP.1999.757532
48. Johnstone, I., Kerkyacharian, G., Picard, D., and Raimondo, M. Wavelet Deconvolution in a Periodic Setting // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology). 2004. Vol. 66. No. 3. P. 547–573. DOI: 10.1111/j.1467–9868.2004.02056.x
49. Новиков Л.В. Вейвлетная деконволюция // Приборы и техника эксперимента. 2007. № 1. С. 69–75.
50. Новиков Л.В. Аппаратно-ориентированные вейвлеты и их применение в обработке экспериментальных данных // Приборы и техника эксперимента. 2005. № 6. С. 13–21.
51. Donoho, D. L. De-Noising by Soft-Thresholding // IEEE Transaction on Information Theory. 1995. Vol. 41. No. 3. P. 613–627. DOI: 10.1109/18.382009
52. Donoho, D.L., Johnstone, I.M. Neo-Classical Minimax Problems, Thresholding, and Adaptive Function Estimation // Bernoulli. 1996. Vol. 2. No. 1. P. 39–62.
53. Шестаков О.В. О скорости сходимости оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов к нормальному закону при использовании робастных оценок дисперсии // Информатика и её применения. 2012. Т. 6. № 2. С. 122–128.
54. Bigot, J., Van Belleghem, S. Log-Density Deconvolution by Wavelet Thresholding // Scandinavian Journal of Statistics. 2009. Vol. 36. No. 4. P. 749–763. DOI: 10.1111/j.1467–9469.2009.00653.x

Поступила 29 сентября 2019 г.

MULTIRESOLUTION APPROXIMATION OF THE SOLUTION OF THE DECONVOLUTION INTEGRAL EQUATION ON BASIS OF NEW FREQUENCY-MODIFIED KRAVCHENKO WAVELETS

V.F. KRAVCHENKO, V.I. PUSTOVOIT, AND A.V. YURIN

doi: 10.25210/jfop-1903-028083

The application of orthogonal Kravchenko wavelets for multiresolution approximation of deconvolution integral equation solution is proposed and substantiated. A new biorthogonal system of basis wavelets oriented towards the restoration of a useful signal is developed. The new basis-wavelets are received with the help of modification of the orthogonal wavelets with finite spectrum by the function stabilizing the problem solution. The research of property of the new biorthogonal frequency-modified wavelets and the construction of the digital filters for realizing fast computing algorithms are presented. The scheme of multiresolution analysis, allowing to solve problems of restoration of a useful signal and effective noise reduction at performance of operations DWT and IDWT, are observed. All these factors considerably allow to speed up the computing process.

Уважаемые читатели!

Подписка на журнал оформляется через подписное агентство «Книга-Сервис» и объединенный каталог «Пресса России» (подписной индекс **29196**)

Журнал включен:

- В *Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)*.
- В базу данных *Russian Science Citation Index (RSCI)* на платформе *Web of Science*.
- В *Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук*.

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

УДК 533.9.082.74

ДИНАМИКА КАСКАДОВ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

© Авторы, 2019

doi: 10.25210/jfop-1903-084096

Буц В. А. — д.ф.-м.н., проф., начальник лаборатории, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»; Институт радиоастрономии НАН Украины; Харьковский национальный Университет им. В.Н. Каразина, Харьков Украина. E-mail: vbuts@kipt.kharkov.ua

Ковальчук И. К. — к.ф.-м.н., н.с., Национальный Научный центр «Харьковский физико-технический институт».

Толстолужский А. П. — к.ф.-м.н., с.н.с., Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт».

Аннотация

Исследована регулярная и стохастическая динамика трехволнового взаимодействия, а также динамика каскадов таких трехволновых процессов. Показано, что матричные элементы взаимодействия волн обратно пропорциональны квадрату частоты НЧ-волны, участвующей в трехволновом взаимодействии. Показано, что пороги возникновения режимов с динамическим хаосом пропорциональны кубу частоты низкочастотной волны. Для плазмы, в частности, это означает, что распады прежде всего возникают с участием низкочастотных волн, которые формируются с участием ионной компоненты плазмы. Численными методами детально исследована динамика каскадов взаимодействующих волн.

Ключевые слова: трехволновые распады, регулярная и стохастическая динамика, каскады распадных процессов, матричные элементы нелинейного взаимодействия, порог возникновения стохастичности

Abstract

Regular and stochastic dynamics of three wave interaction and dynamics of such three wave cascades were investigated. It was shown that matrix elements of interaction are inversely proportional to square of frequency of LF wave that taking part in the three wave interaction. It was shown that thresholds of appearance of regimes with dynamics chaos are proportional to cube of frequency of LF wave. For plasma it means that decays arise first of all with participation of low frequency wave which are formed by ion component of plasma. The cascades dynamics of interacting waves investigated by numerical methods in detail.

Keywords: three wave decays, regular and stochastic dynamics, cascades of decays processes, matrix elements of nonlinear interaction, threshold of stochastic arising

Введение

Распадные процессы в плазме являются хорошо изученным примером слабо нелинейного взаимодействия волн. Результаты изучения распадов в плазме широко представлены в научной литературе. Наиболее полно они изучены, например, в [1–3]. В [4,5] показано, что существуют условия, когда распадный процесс может перейти в стохастический режим. Стохастические распады изучались как численно, так и экспериментально. Результаты этих исследований представлены в работах [4–12].

Ниже будет описана динамика распадных процессов с участием низкочастотных волн, которые формируются с участием ионной компоненты плазмы. В процессе нелинейного трехволнового процесса энергия распадающейся высокочастотной волны (ω_1) переходит в энергию другой высокочастотной волны (ω_2) и в энергию низкочастотной волны ($\omega_3 \ll \omega_{1,2}$). В результате такого распада возникает новая высокочастотная волна (ω_2). Она может, в свою очередь, распадаться. Этот процесс может быть продолжен. В результате получается каскад распадов. Один из вариантов такого процесса изложен в [11, 13]. Можно говорить о каскадах с разными сценариями. В одном из таких случаев низкочастотная волна является общей для всех распадов. В другом случае — в каждом из распадов каскада участвуют разные низкочастотные волны [13]. Возникает естественный вопрос о перераспределении волновой энергии в таком каскаде распадов. Особый интерес для физики плазмы при этом представляет вопрос о величине энергии, которая трансформируется в низкочастотную часть спектра, которая хорошо взаимодействует с ионной компонентой плазмы. Кроме того, важным является нахождение условий, когда динамика этих низкочастотных волн оказывается хаотической,

Отметим, что в подавляющем большинстве исследований процессов нелинейного взаимодействия волн в основном используются безразмерные как зависимые, так и независимые переменные. Во многих случаях это удобно. Однако, часто при таком рассмотрении теряется функциональная зависимость изучаемых процессов от параметров системы. Поэтому ниже, в тех случаях, когда это полезно, будут использованы и зависимые от параметров рассматриваемых систем переменные.

2. Динамика изолированного трехволнового взаимодействия

Динамика амплитуд взаимодействующих волн при трехволновом взаимодействии описывается системой уравнений, которая содержится в [1-3]

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = Va_2 a_3 e^{i\delta t}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} = -Va_1 a_3^* e^{-i\delta t}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} = -Va_1 a_2^* e^{-i\delta t}, \quad (1)$$

где a_i — медленно изменяющиеся амплитуды взаимодействующих волн, $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ — расстройка, $\omega_{1,2}$ — частоты ВЧ-волн, ω_3 — частота НЧ-волны, V — матричные элементы нелинейного взаимодействия волн.

В этом разделе будет исследоваться строгий синхронизм ($\delta = 0$). При этом удобно ввести безразмерное время $\tau = Vt$. Система (1) становится универсальной. Однако важным является определение зависимости матричного элемента от частоты НЧ волн.

Для нахождения этой зависимости из уравнений Максвелла выпишем следующую связь напряженности электрического поля с нелинейным током:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -\frac{4\pi\omega_1}{c^2} \frac{\vec{e}_1^* \vec{J}_{nl1}}{A_1}, \quad (2)$$

где E_1 — амплитуда распадающейся волны в системе ГГС (в отличие от a_1 , которое пронормировано в соответствии с методикой, изложенной в [1]), c — скорость света, \vec{e}_1 — вектор поляризации распадающейся волны, \vec{J}_{nl1} — плотность нелинейного тока, A_1 — величина, функционально зависящая от частоты и волнового вектора распадающейся волны.

Отметим, что уравнение (2) является уже укороченным. Выражение для плотности нелинейного тока может быть получено с помощью уравнений гидродинамики для электронов и ионов плазмы и имеет следующий вид:

$$\vec{J}_{nl1}^{(1)} = -e(\tilde{n}_{e2}\tilde{v}_{e3}) - e(\tilde{n}_{e3}\tilde{v}_{e2}), \quad (3)$$

где e — заряд электрона, \tilde{n}_{ej} , \tilde{v}_{ej} — возмущения плотности и скорости электронов в поле j -ой волны соответственно, и имеют следующий вид

$$\tilde{n}_{e3} = -i \frac{n_0 e k_{z3}}{m_e \omega_3^2} E_{z3}, \quad \tilde{v}_{e2} = -i \frac{e e_{z2}}{m_e \omega_2} E_{z2}. \quad (4)$$

Подставив выражения (4) в (3), а последнее в (2) получим выражение, аналогичное первому уравнению системы (1)

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = V_1 E_2 E_3, \quad (5)$$

где V_1 имеет вид

$$V_1 = \frac{\omega_{pe}^2 e k_3}{m_e c^2 A_1 \omega_3^2}. \quad (6)$$

Формула (6) выражает явную зависимость матричного элемента от параметров низкочастотной волны. А именно, видна зависимость от частоты низкочастотной волны ($V \approx 1 / \omega_3^2$).

2.1. Условия возникновения режимов с динамическим хаосом

В этом подразделе покажем, что условия перехода в режим с динамическим хаосом аномально зависят от частоты низкочастотной волны, участвующей во взаимодействии. А именно, критерий оказывается обратно пропорционален кубу этой частоты. Действительно, в работах [4,5] было показано, что распадный процесс может перейти в стохастический режим, если инкремент распадной неустойчивости (Va_{10}) превышает частоту самой низкочастотной волны. Этот критерий имеет вид

$$\frac{Va_{10}}{\omega_3} \approx \frac{a_{10}}{\omega_3^3} > 1. \quad (7)$$

Здесь a_{10} — начальная амплитуда распадающейся волны.

Из (7) следует, что стохастические режимы в распадах наиболее легко могут быть реализованы при участии волн с низкими частотами. Отмеченное обстоятельство может быть использовано, например, для нагрева ионной компоненты плазмы.

2.2. Зависимость динамики взаимодействия волн от величины расстройки

Выше был рассмотрен достаточно идеализированный случай, когда характеристики взаимодействующих волн строго удовлетворяют условиям синхронизма: $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$, $\delta \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = 0$

($\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ — волновые векторы взаимодействующих волн). Если эти условия не выполняются, то необходимо анализировать систему уравнений (1).

На начальной стадии распада будем полагать амплитуду волны накачки постоянной: $a_1 = a_{10} = \text{const}$. Представляя решение для низкочастотной волны в виде $a_3 = a_{30}e^{i\omega t}$, находим дисперсионное уравнение

$$\omega(\omega + \delta) = -|V|^2 |a_{10}|^2, \quad (8)$$

решение которого имеет вид

$$\omega_{1,2}^{(d)} = \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - |V|^2 |a_{10}|^2} \right) / 2. \quad (9)$$

Таким образом, при наличии расстройки, на начальной стадии распада возникает неустойчивая динамика при условии $\delta^2 - |V|^2 |a_{10}|^2 < 0$, т.е. она носит пороговый характер. При строгом синхронизме ($\delta = 0$) инкремент неустойчивости равен $\gamma = \text{Im}(\omega) = |V| |a_{10}|$.

2.3. Учет волновых свойств низкочастотной волны

В предыдущем подпункте был рассмотрен случай, когда рассматривалась только динамика амплитуд волн на основе укороченных уравнений для всех участвующих во взаимодействии волн. Во многих случаях частота НЧ-волны может оказаться достаточно малой, так что характерные времена нелинейного взаимодействия волн порядка периода НЧ-волны. В этом случае волновые свойства НЧ-волны могут существенно влиять на динамику взаимодействия волн. В данном подразделе учтем такую возможность.

В данном случае систему уравнений (1) следует переписать

$$\begin{aligned} i \frac{da_1}{dt} &= Va_3 a_2 e^{i\Delta t}, & i \frac{da_2}{dt} &= Va_3^* a_1 e^{-i\Delta t}, \\ \frac{d^2 a_3}{dt^2} + \Omega^2 a_3 &= -2\Omega Va_2^* a_1 e^{-i\Delta t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Delta = \omega_1 - \omega_2$, $\Omega = \omega_3$.

На начальной стадии распада также будем полагать амплитуду волны накачки $a_1 = \text{const}$. Записывая решение для низкочастотной волны в виде $b = b_0 e^{i\omega t}$, получим дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\Delta + \omega) - 2\Omega(|V|^2 |a_1|^2) = 0. \quad (11)$$

Обратим внимание на то, что дисперсионное уравнение (11) является уравнением 3-го порядка, в отличие от уравнения (8), которое имеет второй порядок. Кроме того, в уравнении (11) появился еще один параметр (Ω), который характеризует волновые свойства НЧ-волны. В общем случае, имеем четырехпараметрическое алгебраическое уравнение 3-й степени. Аналитическое представление решений дисперсионного уравнения является громоздким, поэтому был проведен численный анализ решений этого уравнения. Ниже графически на рис. 1–3 представлены основные особенности решений этого уравнения.

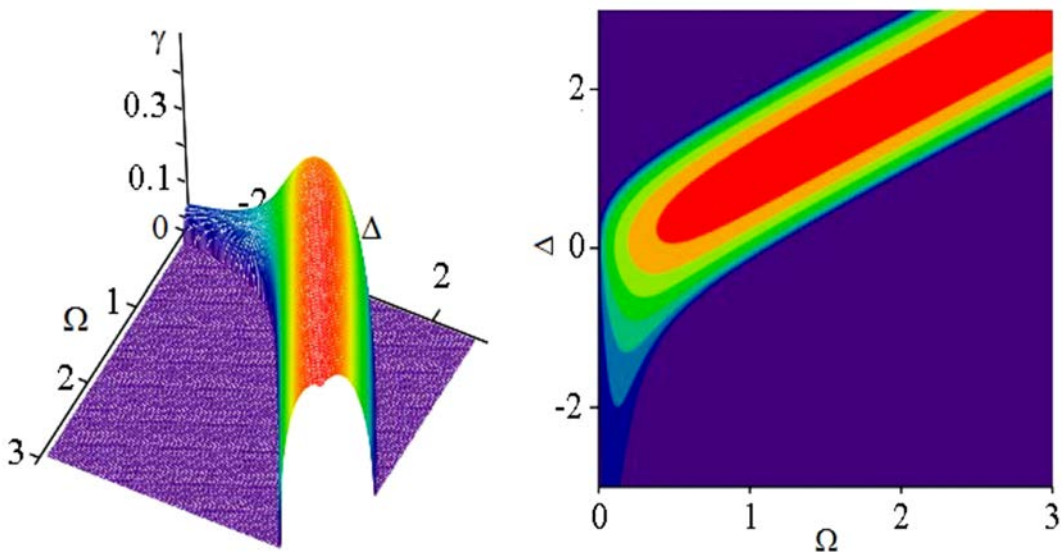


Рис. 1. Зависимость инкремента трехволнового взаимодействия от параметров Δ и Ω для амплитуды волны накачки $a_1(0) = 0.5$.

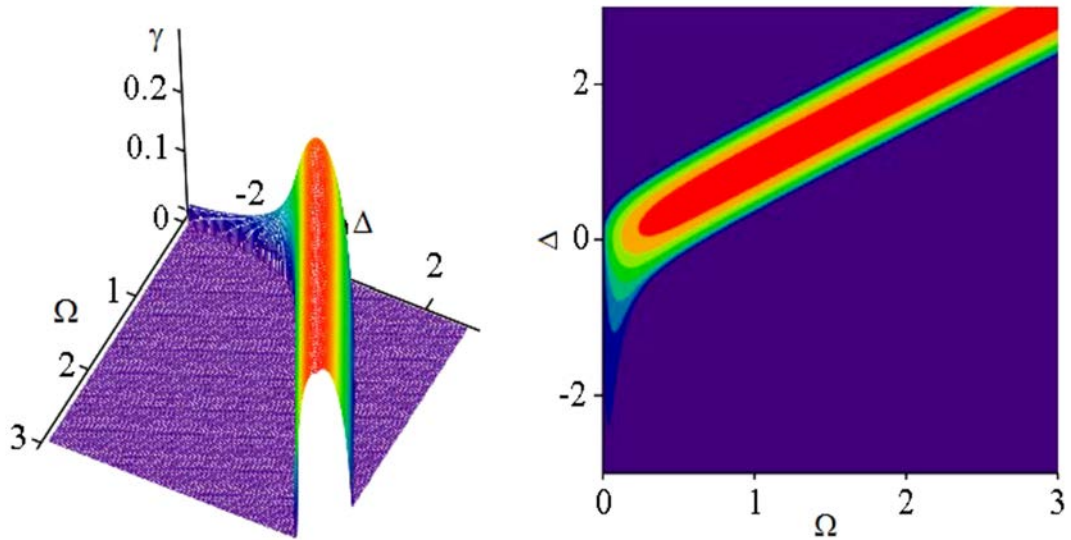


Рис. 2. Зависимость инкремента трехволнового взаимодействия от параметров Δ и Ω для амплитуды волны накачки $a_1(0) = 0.3$.

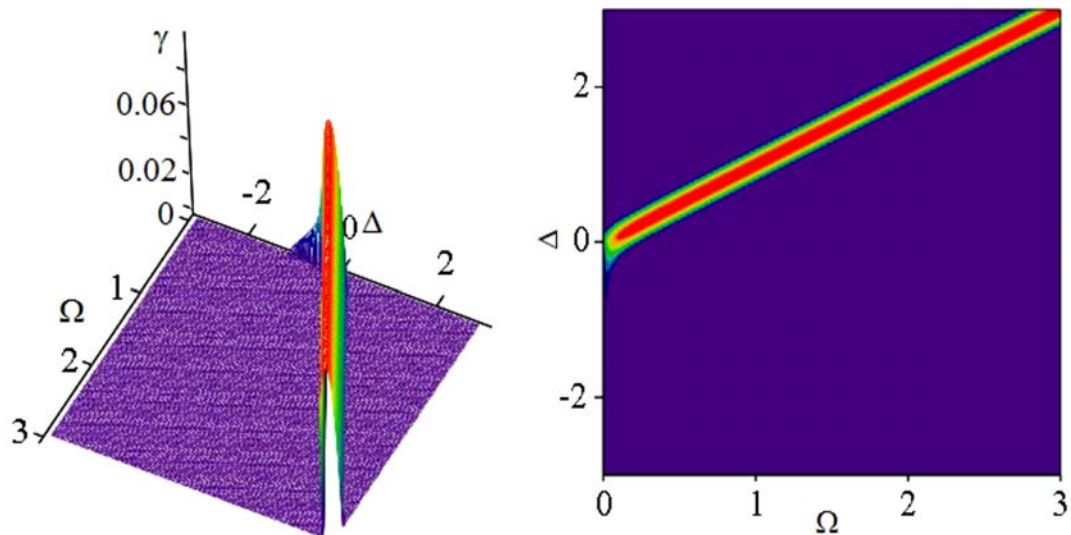


Рис. 3. Зависимость инкремента трехволнового взаимодействия от параметров Δ и Ω для амплитуды волны накачки $a_1(0) = 0.1$.

Из этих графиков видно, что максимальное значение инкремента пропорционально амплитуде волны накачки a_0 .

С уменьшением амплитуды волны накачки область частот и расстроек, при которых, развивается неустойчивость, сужается и при малых значениях амплитуды волны накачки $a_1(0) \leq 0.1$ неустойчивость развивается в условиях близких к резонансным $\Delta - \Omega \cong 0$.

Переход к стохастичности имеет вид

$$\frac{(Va_{10})}{\omega_3} > 1. \quad (12)$$

В частности, в [4,5] показано, что физический процесс, описываемый системой уравнений (1) может быть стохастическим. Как видно из выражения (12), переход к стохастичности имеет пороговый характер.

3. Каскады распадных процессов

Традиционно мы рассматриваем такой сценарий распадного процесса, когда в начальный момент амплитуда распадающейся волны значительно превышает амплитуды тех волн, которые возбуждаются в процессе распада. Далее в результате перекачки энергии в эти волны, амплитуда распадающейся волны

уменьшается, а амплитуды двух других возрастают. Вследствие условия для частот ($\omega_1 \approx \omega_2$, $\omega_3 \ll \omega_{1,2}$), частота распадающейся волны ω_1 и частота второй волны ω_2 являются близкими. По мере роста амплитуды второй волны, она может, наряду с первой, включиться в новый распад. Этот процесс может быть продолжен. Таким образом, можно получить целый каскад распадов. Здесь можно выделить два случая. В первом из них в каждом из таких распадов будет участвовать одна и та же низкочастотная волна. В другом случае это могут быть разные низкочастотные волны. Существенно то, что их частоты и волновые векторы должны удовлетворять условиям синхронизма ($\omega_n = \omega_{n-1} + \Omega$, $\vec{k}_n = \vec{k}_{n-1} + \vec{\kappa}_n$). При этом ω_n , \vec{k}_n — частоты и волновые числа высокочастотных волн; Ω , $\vec{\kappa}_n$ — частота и волновые числа низкочастотных волн.

3.1. Динамика ограниченного числа элементарных трехволновых процессов

Для анализа динамики ограниченного каскада распадов с участием одной и той же низкочастотной волны удобно использовать следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} i \frac{da_n}{dt} &= V_{n-1} b a_{n-1} e^{i\delta t} + V_{n+1} b^* a_{n+1} e^{-i\delta t}, \\ i \frac{db}{dt} &= \sum_{n=-N_1}^{N_2} V_{n-1} a_{n-1}^* a_n e^{-i\delta t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\delta = \omega_n - \omega_{n-1} - \Omega$ — расстройка, ω_n — частота ВЧ волны, Ω — частота НЧ-волны, V_n — матричные элементы нелинейного взаимодействия волн, $-\infty < n < \infty$ номера волн, участвующих в распаде. При этом полагаем, что частоты и волновые вектора высокочастотных волн много больше частот и волновых векторов низкочастотных: $\omega \gg \Omega$, $k \gg \kappa$. Здесь для удобства записи распадающаяся высокочастотная волна с максимальной амплитудой имеет номер $n=0$. Амплитуда низкочастотной волны записана как b , ее частота и волновое число — Ω , κ .

При выполнении этого условия, матричные элементы V_n слабо зависят от номера n [1,14]. Будем считать их одинаковыми и равными единице (всегда можно выбрать нужную нормировку). В реальных системах, число высокочастотных взаимодействующих волн хотя и большое, но конечное. Поэтому будем полагать, что амплитуды волн $a_n = 0$, если n находится вне диапазона значений $-N_1 \leq n \leq N_2$ (N_1 — число «красных» спутников, N_2 — число «синих» спутников). Система уравнений (13) с точностью до членов порядка $(\Omega/\omega_0, \kappa/k)$ имеет интегралы движения:

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} \omega_n |a_n|^2 + \Omega |b|^2 = \varepsilon, \quad (14)$$

$$\sum |a_n|^2 = I. \quad (15)$$

Соотношение (14) представляет полную энергию взаимодействующих волн, а соотношение (15) можно интерпретировать как число квантов взаимодействующих ВЧ-волн. Кроме того, можно показать, что

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n = (|a_{-N_1}|^2 - |a_{N_2}|^2). \quad (16)$$

И в случае, когда число «красных» и «синих» спутников равно ($N_1 = N_2$), при начальных условиях ($a_0^0 = a_0(t=0)$, $b^0 = b(t=0)$) имеет место еще один интеграл движения

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n = \text{const}. \quad (17)$$

Действительно, если в начальный момент времени задана ВЧ-волна ($a_0^0 = a_0(t=0)$) и амплитуда НЧ-волны мала, а число возбужденных ВЧ-волн велико ($n \rightarrow \infty$), решение уравнения (17) возможно представить в виде [1,4]

$$\begin{aligned} a_n(t) &= a_0^0 i^n e^{in\beta} J_n(|B|), \\ B(t) &= \int_0^t b(t') \exp(-i\delta t') dt', \quad \beta = \arg B. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $J_n(|B|)$ — функция Бесселя n -ого порядка.

Справедливость такого решения легко проверяется прямой подстановкой (18) в (13) и использованием формулы: $2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$. Как видно из (18), из-за взаимодействия с НЧ-волной, с течением времени происходит возбуждение все более высоких номеров волн a_n . Отсюда также следует, что процесс возбуждения спутников симметричен относительно замены $n \rightarrow -n$, то есть $|a_n| = |a_{-n}|$, если начальные условия симметричны относительно такой подстановки, что и подтверждает существование интеграла движения (17). В этих условиях изучаемая система имеет аналитическое решение. Динамика всех взаимодействующих

волн при этом регулярна. Таким образом, имеем достаточно уникальный случай полностью интегрируемой системы, имеющей бесконечное число степеней свободы. Из уравнений (13) можно получить следующее уравнение для амплитуды низкочастотной волны

$$\ddot{b}_1 + i\delta\dot{b}_1 + \omega_{N_L}^2 b_1 = 0, \quad (19)$$

где $\omega_{N_L}^2 = |a_{N_1}|^2 - |a_{N_2}|^2$.

Проанализируем решения этого уравнения в наиболее простом случае. Если число «красных» спутников равно числу «синих» ($N_1 = N_2$), то $\omega_{N_L}^2 = 0$. Решение уравнения (19) при этом имеет вид

$$b_1(t) = b_0 + \frac{1}{i\delta} \dot{b}_1(0)(e^{i\delta t} - 1). \quad (20)$$

Из (20) следует, что значение амплитуды НЧ-волны остается постоянным, если, при $t=0$ заданы ВЧ и НЧ-волны ($b(0) = b_0$, $a_0^0 = a_0(0)$) и $\dot{b}(0) = 0$. Если в начальный момент времени заданы две ВЧ-волны (случай beat-wave), то амплитуда волны НЧ колеблется с частотой δ . Когда $\delta \rightarrow 0$ имеет место линейный рост $b(t)$ со временем. Динамика процесса взаимодействия волн в этом случае должна быть наиболее простой, однако аналитического решения она не имеет.

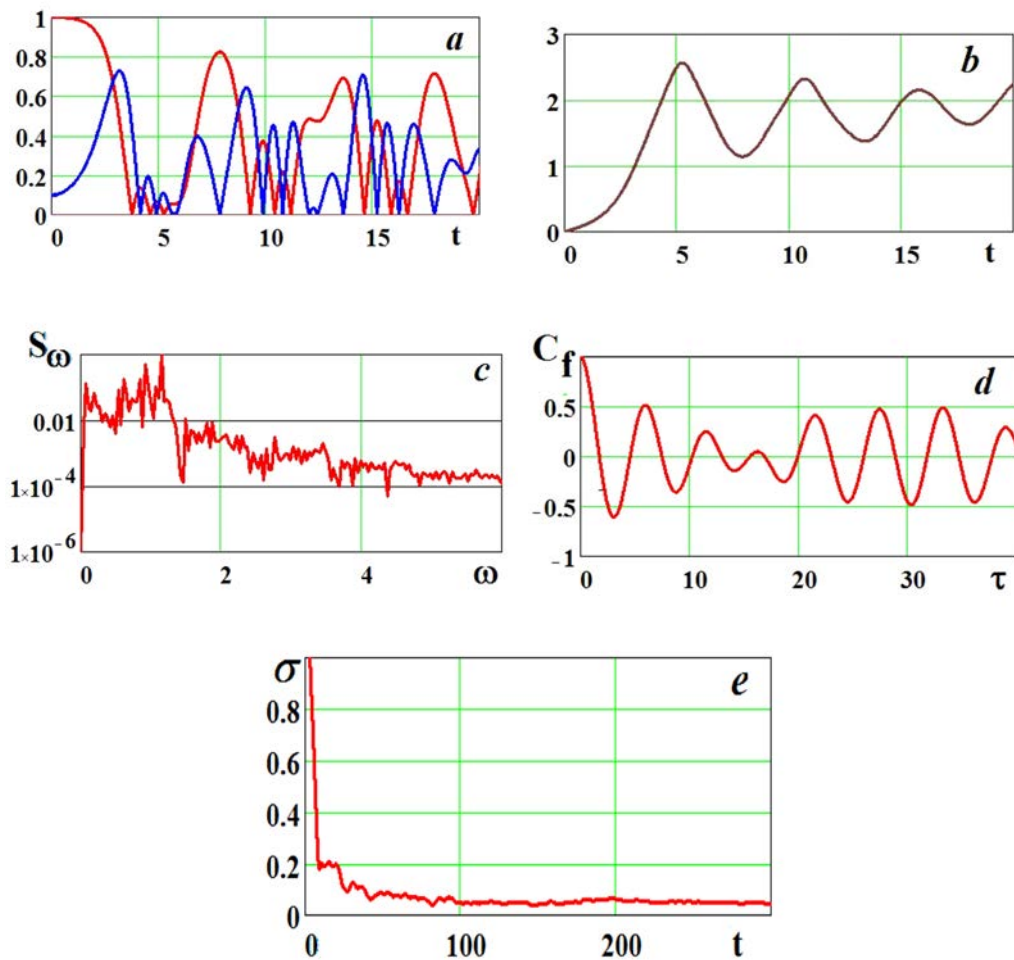


Рис. 4. Значения модулей амплитуд $|a_n|, |b|$ а) амплитуда $|a_0|$ ВЧ-волны с $n=0$ — красная линия, амплитуда $|a_{-1}|$ ВЧ-волна с $n=-1$ — синяя линия, б) амплитуда $|b|$ НЧ-волны, в, г) спектр и автокорреляционная функция амплитуды $|b|$ НЧ-волны, д) — максимальный показатель Ляпунова системы (13).

3.1.1. Численный анализ

Полученные выше аналитические результаты применимы в случае $n \rightarrow \infty$, и не дают возможности исследовать динамику конечного числа взаимодействующих волн. Для конечного числа n система уравнений (13) была решена численно при различных начальных условиях для полей и различных параметров расстройки δ . В работе исследовано: временную динамику взаимодействия волн, спектры мощности (S_ω)

реализаций, их автокорреляционные функции (C_f) и максимальный показатель Ляпунова системы взаимодействующих волн (σ). При этом в начальный момент времени выбирались действительные значения полей: $Re a_0(t=0) = a_0^0$, $Re a_{-1}(t=0) = a_{-1}^0$, $Re b(t=0) = b_0$. Мнимые части полей и амплитуды других волн при $t=0$ выбирались равными нулю. Точность вычислений контролировалась с помощью интеграла (15). Во всех проведенных численных исследованиях значение интеграла сохранялось с достаточной степенью точности: величина отклонения от интеграла $\Delta = \sum |a_n(t)|^2 - \sum |a_n(t=0)|^2$ не превышала значений 10^{-9} при значениях амплитуд взаимодействующих волн порядка единицы.

На рис. 4 показаны результаты численных расчетов системы (13) для асимметричного случая $N_1 = 7$, $N_2 = 0$ с начальными условиями типа beat-wave — $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.1$ при выполнении условия синхронизма ($\delta = 0$).

Из этих графиков видно, что амплитуды высокочастотных колебаний имеют форму соответствующую аналитическому представлению колебаний (18) на интервалах времени до $t^* \leq 5.1$, после чего возникает сложная динамика амплитуд взаимодействующих волн.

Особенностью такого типа нелинейного взаимодействия волн является тот факт, что число квантов низкочастотной волны растет на интервале времени, когда возмущение не достигло последних участвующих во взаимодействии волн, после чего возникают колебания числа квантов низкочастотных волн. Максимальное количество квантов НЧ-волны $N_b = |b|^2$ при этом превышает количество квантов каждой из ВЧ-волн $N_k = |a_k|^2$ более чем в шесть раз. Максимальный показатель Ляпунова системы σ практически не убывает и по порядку величины $\sigma \approx 4 \cdot 10^{-2}$, поэтому в этом случае можно говорить о нерегулярной динамике каскада распадов.

С увеличением числа взаимодействующих волн ($N_1 = 11$, $N_2 = 0$), как показывает численный анализ, возрастает максимальная амплитуда НЧ волны, и несколько возрастает время $t^* \approx 6.0$. При этом, если увеличивать начальные амплитуды волн $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.5$, то увеличивается максимальная амплитуда НЧ- волны и уменьшается время $t^* \leq 4.2$. Остальные характеристики распадного процесса волн при этом качественно изменяются мало. На рис. 5 показаны результаты расчета динамики низкочастотных волн для этих условий.

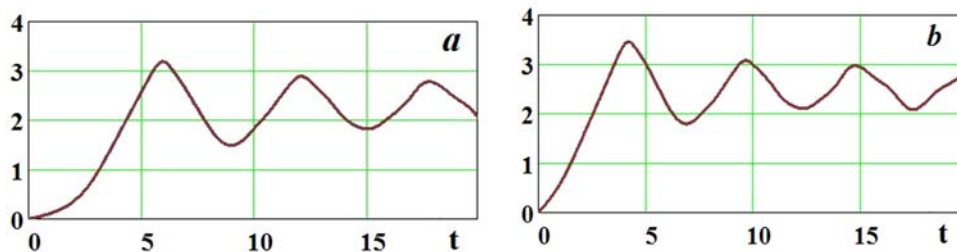


Рис. 5. Значения модулей амплитуд низкочастотной волны $|b|$ при $N_1 = 11$, $N_2 = 0$: а) $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.1$, б) $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.5$.

На рис. 6 показаны результаты численных расчетов для симметричного случая (число «красных» спутников $N_1 = 7$ равно числу «синих» спутников $N_2 = 7$) с начальными условиями типа beat-wave — $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.1$, при выполнении условия синхронизма ($\delta = 0$).

Из этих графиков видно, что амплитуды высокочастотных колебаний также имеют форму, соответствующую аналитическому представлению (18) колебаний на интервалах времени необходимых для того, чтобы возмущение достигло последних участвующих во взаимодействии волн.

Спектр низкочастотной волны линейчатый, корреляционная функция является периодической. Максимальный показатель Ляпунова системы взаимодействующих волн σ убывает со временем и по порядку величины $\sigma < 0.02$, так что можно говорить о регулярной динамике волн.

Особенностью такого типа нелинейного взаимодействия волн является тот факт, что число квантов низкочастотной волны линейно растет на интервалах времени $t^* \approx 10$, когда возмущение не достигло последних участвующих во взаимодействии волн, после чего практически линейно спадает до нуля, и динамика квантов низкочастотных волн повторяется. Максимальное количество квантов НЧ-волны при этом не превышает количество квантов ВЧ-волн.

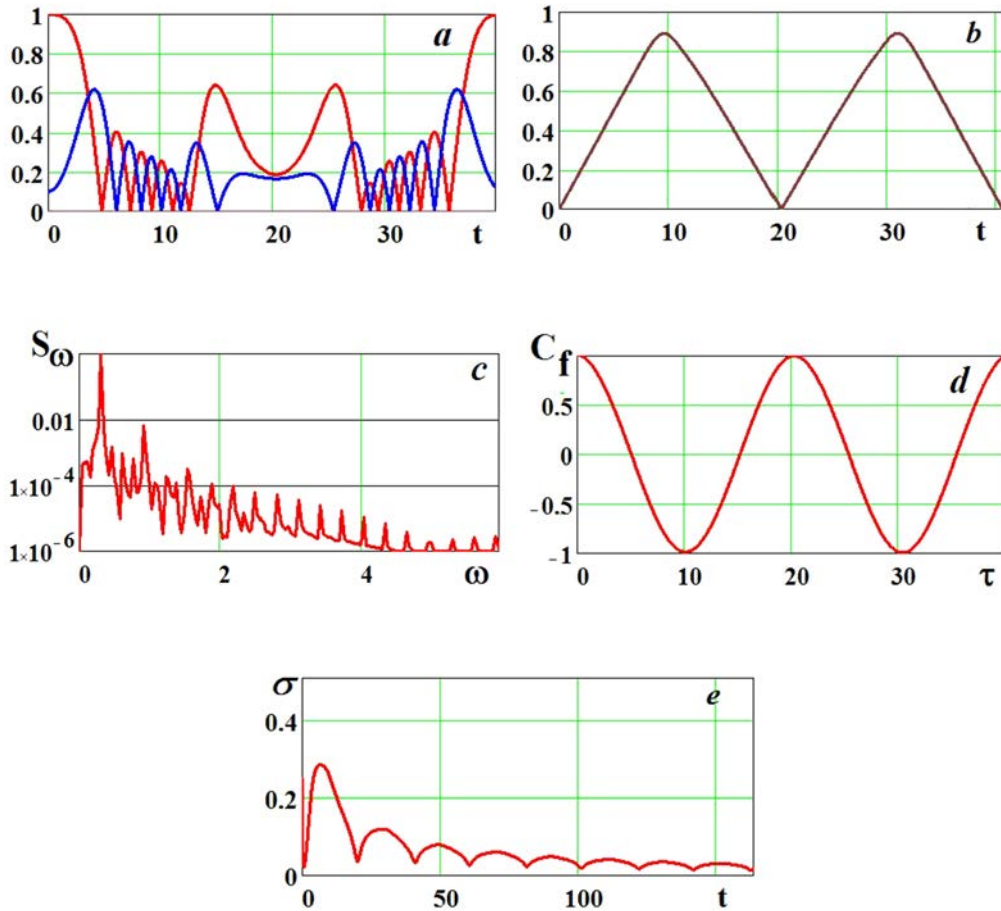


Рис. 6. Значения модулей амплитуд $|a_n|, |b|$: а) амплитуда $|a_0|$ ВЧ-волны с $n=0$ — красная линия, амплитуда $|a_{-1}|$ ВЧ-волны с $n=-1$ — синяя линия, б) амплитуда $|b|$ НЧ-волны, в, г) спектр и автокорреляционная функция амплитуды $|b|$ НЧ-волны, д) максимальный показатель Ляпунова системы (13).

3.2 Динамика ограниченного числа элементарных трехволновых процессов взаимодействия волн с учетом волновых свойств низкочастотной волны

Поскольку частота НЧ-волны достаточно мала ($\omega_n \gg \Omega$) при усреднении ее уравнения по высокой частоте можно использовать не укороченное уравнение, а уравнение второго порядка. Рассмотрим исходную систему уравнений (13), в которой не проведено усреднение для низкочастотной волны, так что ее уравнение является уравнением второго порядка

$$i \frac{da_n}{dt} = ba_{n-1}e^{i\Delta t} + b^* a_{n+1}e^{-i\Delta t}, \quad (21a)$$

$$\frac{d^2b}{dt^2} + \Omega^2 b = -2\Omega \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n e^{-i\Delta t}, \quad (21b)$$

где $\Delta = \delta + \Omega = \omega_n - \omega_{n-1}$.

Таким образом, система уравнений (21) качественно отличается от (13). Во-первых, динамика амплитуды НЧ-волны описывается уравнением второго порядка (уравнением линейного осциллятора), во вторых, расстройка δ в уравнениях (13) отлична от расстройки Δ в уравнениях системы (21). Получение аналитических результатов решения уравнений с учетом волновых свойств низкочастотной волны не представляются возможным. Поэтому исследуются основные свойства решений системы уравнений (21) численно.

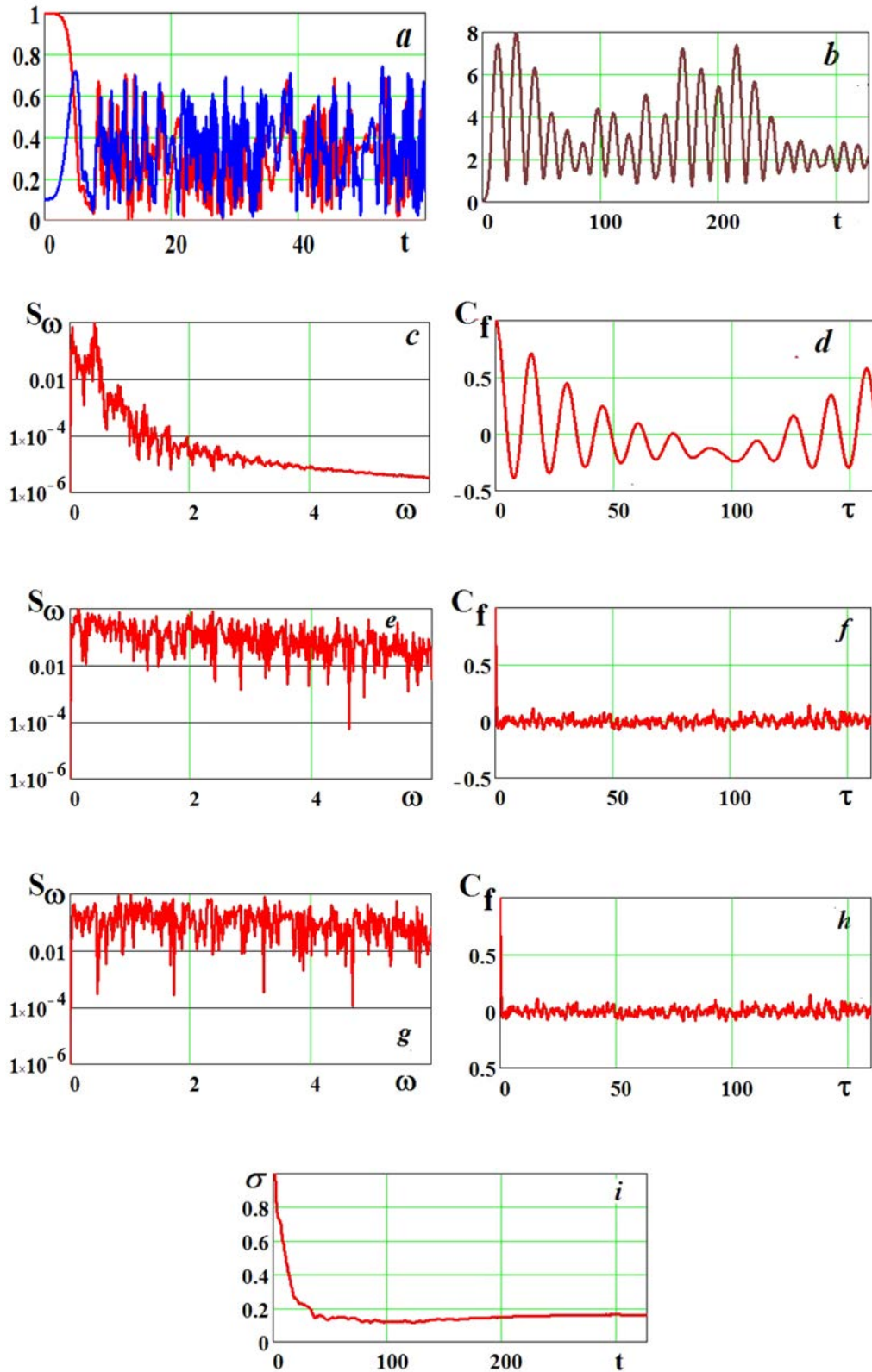


Рис. 7. Значения модулей амплитуд $|a_n|, |b|$ а) амплитуда $|a_0|$ ВЧ-волны с $n=0$ — красная линия, амплитуда $|a_{-1}|$ ВЧ-волна с $n=-1$ — синяя линия, б) амплитуда $|b|$ НЧ-волны. в, г) спектр и корреляционная функция амплитуды $|b|$ НЧ-волны, д, е) спектр и корреляционная функция амплитуды $|a_0|$ ВЧ-волны, ж, з) спектр и корреляционная функция амплитуды $|a_{-7}|$ ВЧ-волны, и) — максимальный показатель Ляпунова системы (21).

3.2.1. Численный анализ

Для конечного числа n система уравнений (21) была решена численно при различных начальных условиях для полей и различных параметров расстройки Δ и частоты Ω . Также как и в предыдущем случае, мы исследовали: временную динамику взаимодействия волн, спектры мощности (S_ω) реализаций, их автокорреляционные функции (C_f) и максимальный показатель Ляпунова системы взаимодействующих волн (σ). При этом в начальный момент времени выбирались действительные значения полей: $\text{Re}a_0(t=0) = a_0^0$; $\text{Re}a_{-1}(t=0) = a_{-1}^0$; $b(t=0) = b_0$. Мнимые части полей и амплитуды других волн при $t=0$ выбирались равными нулю. Точность вычислений так же контролировалась с помощью интеграла (15). Во всех проведенных численных исследованиях значение интеграла сохранялось с достаточной степенью точности: величина отклонения от интеграла $\Delta = \sum |a_n(t)|^2 - \sum |a_n(t=0)|^2$ не превышала значений 10^{-9} при значениях амплитуд взаимодействующих волн порядка единицы.

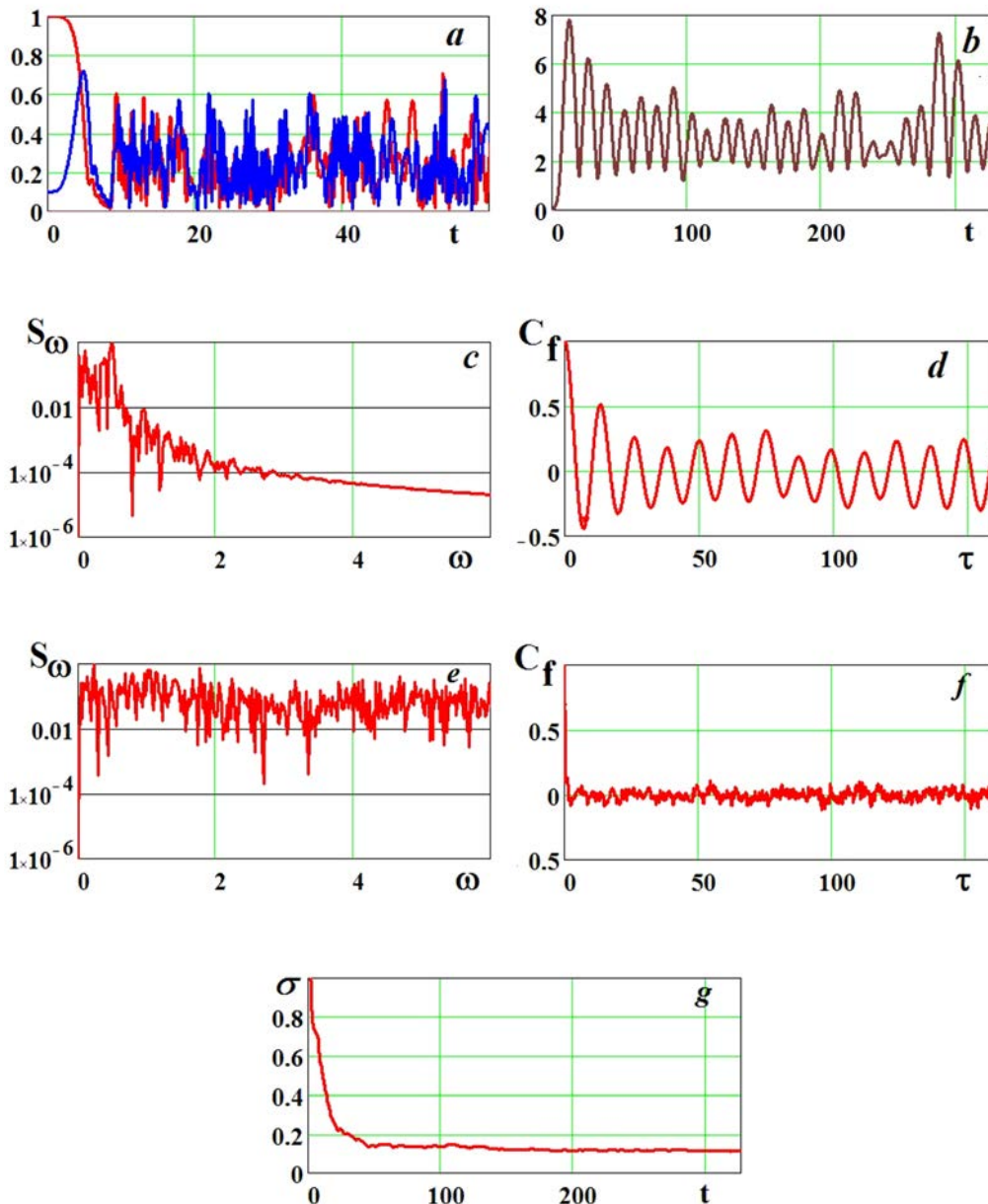


Рис. 8. Значения модулей амплитуд $|a_n|, |b|$ а) амплитуда $|a_0|$ ВЧ-волны с $n=0$ — красная линия, амплитуда $|a_{-1}|$ ВЧ-волна с $n=-1$ — синяя линия, б) амплитуда $|b|$ НЧ-волны, в, г) спектр и корреляционная функция амплитуды $|b|$ НЧ-волны, д, е) спектр и корреляционная функция амплитуды $|a_0|$ ВЧ-волны, ж) максимальный показатель Ляпунова системы (21).

Ниже представлены результаты численного анализа системы уравнений (21).

На рис. 7 показаны результаты численных расчетов системы (21) для асимметричного случая ($N_1 = 7, N_2 = 0$) с начальными условиями типа beat-wave — $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.1$, при $\Omega = 0.3$, $\Delta = 0.3$.

Из этих графиков видно, что в начале взаимодействия амплитуды высокочастотных колебаний также имеют форму соответствующую аналитическому представлению (18) колебаний на интервалах времени, необходимых для того, чтобы возмущение достигло последних участвующих во взаимодействии волн. После этого амплитуды высокочастотных колебаний имеют форму подобную нерегулярным колебаниям с различной интенсивностью, частоты которых также изменяются нерегулярно.

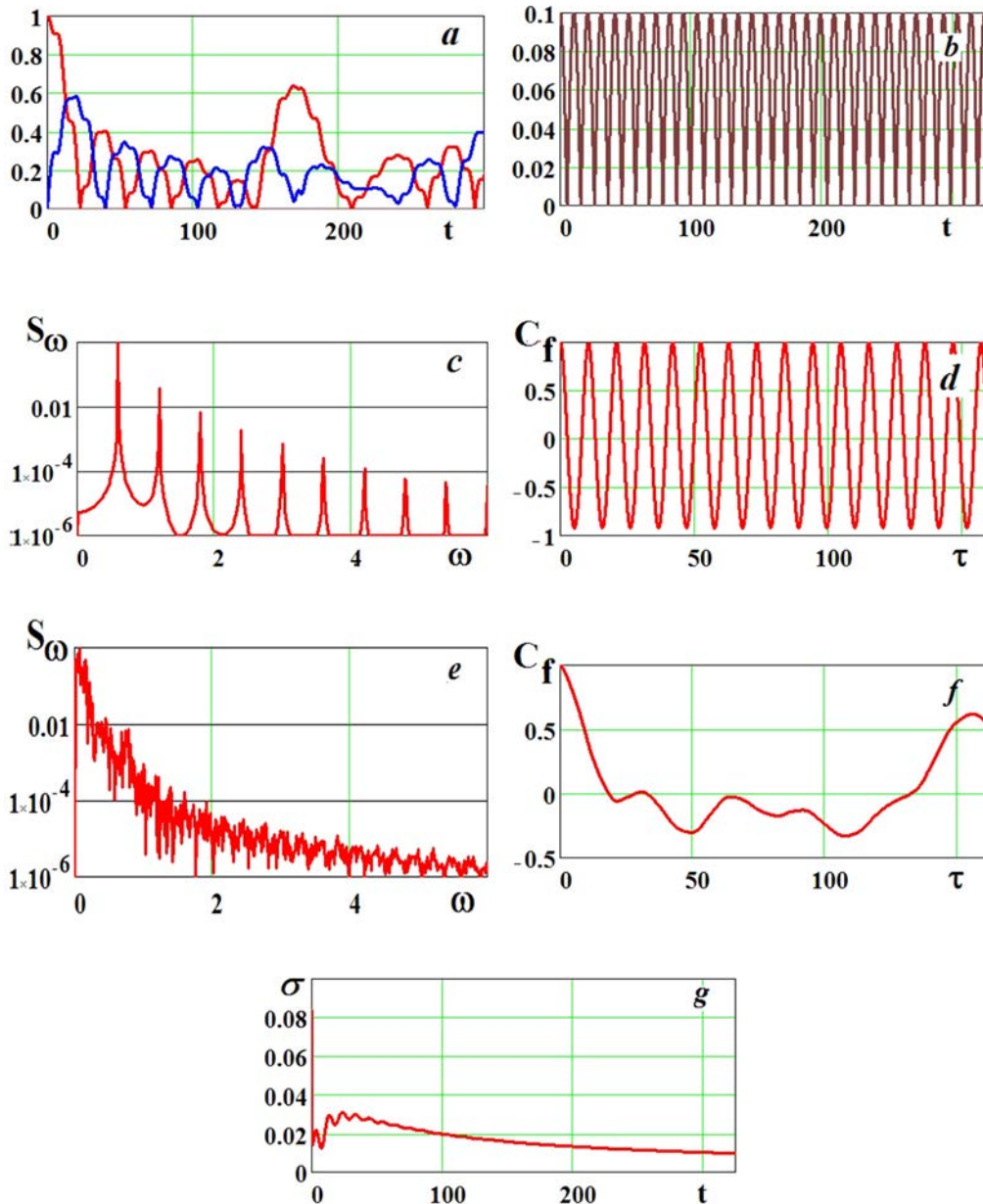


Рис. 9. Значения модулей амплитуд $|a_n|, |b|$ а) амплитуда $|a_0|$ ВЧ-волны с $n=0$ — красная линия, амплитуда $|a_{-1}|$ ВЧ-волна с $n=-1$ — синяя линия, б) амплитуда $|b|$ НЧ-волны. в, г) спектр и корреляционная функция амплитуды $|b|$ НЧ-волны, д, е) спектр и корреляционная функция амплитуды $|a_0|$ ВЧ-волны, ж, з) спектр и корреляционная функция амплитуды $|a_{-7}|$ ВЧ-волны, и) максимальный показатель Ляпунова системы (21).

Спектры этих волн приобретают форму типа «стол», корреляционная функция быстро убывает с течением времени до нулевого значения, и испытывает нерегулярные колебания вблизи этого значения. Поэтому можно говорить о случайной амплитудной и частотной модуляции ВЧ-волн. Спектр низкочастотной волны линейчатый, корреляционная функция является периодической, так что динамика низкочастотной волны носит регулярный характер. Максимальный показатель Ляпунова со временем выходит практически на постоянный уровень $\sigma \sim 0.2$ (см. рис. 7(и)), что подтверждает хаотический характер процесса. Следовательно, при взаимодействии низкочастотной волны с системой высокочастотных волн с хаотической динамикой, динамика низкочастотной волны остается регулярной.

Число квантов низкочастотной волны растет на интервале времени, когда возмущение не достигло последних участвующих во взаимодействии волн, после чего возникают колебания числа квантов низкочастотных волн. Максимальное количество квантов НЧ-волны $N_b = |b|^2$ превышает количество квантов каждой из ВЧ-волн $N_k = |a_k|^2$ более чем на порядок.

На рис. 8 приведены результаты численных расчетов системы (21) для асимметричного случая ($N_1 = 11$, $N_2 = 0$) с начальными условиями типа beat-wave — $a_0^0 = 1$ и $a_{-1}^0 = 0.1$, при $\Omega = 0.3$, $\Delta = 0.3$.

Из этих графиков видно, что увеличение числа волн, участвующих в каскаде, не приводит к существенному изменению динамики взаимодействия волн. Значения максимального показателя Ляпунова системы взаимодействующих волн $\sigma \sim 0.128$. Динамика амплитуд высокочастотных колебаний также носит хаотический характер, а характер динамики низкочастотной волны остается достаточно регулярным.

Максимальное количество квантов НЧ-волны $N_b = |b|^2$ также значительно превышает количество квантов каждой из ВЧ-волн $N_k = |a_k|^2$.

На рис. 9 показаны результаты численных расчетов для симметричного случая (число «красных» спутников $N_1 = 7$ равно числу «синих» спутников $N_2 = 7$) с начальными условиями — $a_0^0 = 1$ и $b^0 = b(t=0) = 0.1$, при $\Omega = 0.3$, $\Delta = 0.3$.

Из этих графиков видно, что в каскаде распадов спектр низкочастотной волны волн линейчатый, автокорреляционная функция периодически меняется со временем, спектр волны накачки носит линейчатый характер, автокорреляционная функция медленно изменяется со временем. Максимальный показатель Ляпунова системы волн σ убывает со временем и по порядку величины не превосходит $\sigma < 1 \cdot 10^{-2}$, поэтому в этом случае можно говорить, что динамика амплитуд как высокочастотных волн, так и низкочастотной волны носит регулярный характер.

Заключение

Отметим наиболее важные результаты:

1. При нелинейном взаимодействии волн возможна эффективная трансформация энергии высокочастотной волны в энергию низкочастотной волны.
2. Величина матричного элемента нелинейного взаимодействия волны обратно пропорциональна квадрату низкой частоты. В результате процесс распада на низкие частоты происходит при меньших напряженностях поля распадающейся волны.
3. Режимы со стохастической динамикой возникают, прежде всего, при участии волн с минимальной частотой НЧ-волны. Это связано с тем, что порог стохастической неустойчивости обратно пропорционален кубу низкой частоты.
4. Особенностью динамики каскада распадов с учетом волновых свойств низкочастотной волны является то, что максимальное число квантов низкочастотной волны превышает количество квантов каждой из ВЧ-волн более чем на порядок.

Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 304с.
2. Вильгельмсон Х, Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме / М.: Энергоатомиздат. 1981. 224 с.
3. Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме / М.: Наука, 288 с.
4. Буц В.А., Мануйленко О.В., Степанов К.Н., Толстолужский А.П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика при взаимодействии типа волна-волна // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 9. С. 794–801
5. Буц В.А., Куприянов А.Н., Мануйленко О.В., Толстолужский А.П. Неустойчивость и динамический хаос при слабо нелинейном взаимодействии // Известия вузов «ПНД». 1993. Т. 2. № 1–2. С. 57.
6. Antonov, A.N., Buts, V.A., Kovalchuk, I.K., Kovpik, O.F., Kornilov, E.A., Svichensky, V.G., and Tarasov, D.V. Regular and Stochastic decays of Waves in a Plasma Cavity // Plasma Physics Reports. 2012. Vol. 38. No. 8. P. 636–650.
7. Antonov, A.N., Buts, V.A., Kovalchuk, I.K., Kovpik, O.F., Kornilov, E.A., Svichensky, V.G., and Tarasov, D.V. Investigation of chaotic decay in the resonator filled with plasma // Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics". 2011. No. 1. P. 89–91.

8. Buts, V.A., Kovalchuk, I.K. Dynamics of three wave stochastic decays in nonlinear matter // Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics". 2016. No. 6. P. 156–159.
9. Antonov, A.N., Buts, V.A., Kovalchuk, I.K., Kovpik, O.F., Kornilov, E.A., Svichensky, V.G., and Tarasov, D.V. The peculiarities stochastic heating of the plasma in plasma resonator // Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics". 2014. No. 6. P. 87–90.
10. Buts, V.A., Kovalchuk, I.K. Dynamics of three wave stochastic decays in nonlinear matter // Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics". 2016. No. 6. P. 156–159.
11. Buts, V.A., Kovalchuk, I.K., Tarasov, D.V., and Tolstoluzhsky, A.P. Peculiarity of chaotic and regular dynamics of waves // Plasma Physics. 2012.
12. Buts, V.A., Kovalchuk, I.K. Features of three wave interaction in the magnetoactive plasma // Problems of Atomic Science and Technology. 2015. No. 1. Series "Plasma Physics" (21). P. 152–155.
13. Буц В. А., Ковальчук И. К., Тарасов Д. В., Толстолужский А. П. Регулярная и хаотическая динамика слабонелинейного взаимодействия волн // Электромагнитные волны электронные системы. 2011. Т. 16. № 1. С. 51–61.
14. Bakai, A.S. Interaction of high-frequency and low-frequency waves in a plasma. // Nucl. Fusion. 1970. Vol. 10. No. 1. P. 53.

Поступила 6 августа 2019 г.

FEATURES OF WEAKLY NONLINEAR INTERACTION OF WAVE

V.A. BUTS, I.K. KOVALCHUK, AND A.P. TOLSTOLUZHSKY

doi: 10.25210/jfop-1903-084096

The article presents the results of the study of the regular and stochastic dynamics of three-wave decays in plasma, and also cascade processes with participation of such decays. Using the Maxwell equations for the electromagnetic field and the hydrodynamic equations for electrons and plasma ions, analytical expressions are obtained for the matrix elements of isolated decays. The case is considered when the HF wave decays into a new HF (with a close frequency) and a low frequency one. It is shown that in this case the matrix element of the nonlinear interaction is inversely proportional to the square of the low frequency involved in the interaction. Analysis of the criterion for the decay transition to the stochastic mode shows that the threshold for the arising of stochasticity is proportional to the cube of the lowest frequency. Thus, decays with chaotic modes will be realized, first of all, for low-frequency oscillation branches. This circumstance is essential for the excitation of those branches which dispersion is determined by the ion component of the plasma. Low-frequency chaotic oscillations can be used to heat ions.

The influence of the detuning and wave properties of a low-frequency wave on the development of decay instability is analyzed. It is shown that, in the presence of detuning, the decay instability has a threshold character, and its maximum increment is proportional to the initial value of the amplitude of the pump wave.

The scenario for the arising of decay process cascades can be represented as follows. The case is considered when, at the initial moment of time, the amplitude of the highest-frequency wave significantly exceeds the amplitudes of all other waves, as well as the threshold for the arising of stochasticity. As a result of the decay, the following RF wave is generated. It is included in the new decay process. The result is a sequence of decays (cascade). Cascades were considered analytically and numerically. Integrals for cascades with a limited number of decays are obtained. It was assumed that all the decays are connected by single low-frequency wave.

A numerical research of the cascades was carried out for two cases. In the first, the equation of the first-order for the low-frequency wave was used, in the second it was of the second order, that is, the wave properties of the low-frequency wave were taken into account. The temporal dynamics of interacting waves, power spectra, autocorrelation functions, and the maximum index of Lyapunov for realizations were studied. The dynamics of the cascades in both cases had both regular and stochastic nature. In both cases, the maximum number of quanta of the LF wave exceeded the number of quanta of each of the HF waves. And for the model in which the wave properties of the low-frequency waves are taken into account, this excess was more than an order of magnitude.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И УСТРОЙСТВА

УДК 681.785.574

ЭКВИДИСТАНТНОСТЬ ТОЧЕК РЕГИСТРАЦИИ ИНТЕРФЕРОГРАММЫ В ФУРЬЕ-СПЕКТРОМЕТРЕ

© Авторы, 2019

doi: 10.25210/jfop-1903-0970102

Вагин В. А. — д.т.н., заведующий отделом инфракрасной спектроскопии, Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва. E-mail: vaguine@mail.ru

Хорохорин А. И. — с.н.с., Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН.

Аннотация

Описано и исследовано влияние неэквидистантности точек регистрации интерферограммы в фурье-спектрометре, имеющей периодический характер, на восстанавливаемый спектр. Рассмотрен механизм формирования управляющих импульсов для АЦП в референтном (лазерном) канале. Показано, что периодическая ошибка регистрации приводит к появлению в восстанавливаемом спектре характерных духов. Рассмотрена упрощенная электронная схема формирования «меток» запуска АЦП, минимизирующая такие ошибки.

Ключевые слова: фурье-спектрометр, регистрация интерферограммы, шаг регистрации, референтный канал, эквидистантность, триггер Шмитта, гистерезис

Abstract

The effect of non-equidistance of the registration points of the interferogram in a Fourier spectrometer having a periodic character on the reconstructed spectrum is described and investigated. The mechanism of formation of control pulses (labels) in the reference (laser) channel for ADC is considered. It is shown that the periodic error of registration leads to the appearance of characteristic spirits in the restored spectrum. A simplified electronic scheme for the formation of labels of start of ADC minimizing such errors is considered.

Keywords: Fourier spectrometer, the registration of the interferogram, registration step, the reference channel, equidistance, schmitt trigger, hysteresis

При работе с фурье-спектрометром иногда проводят измерения во всем возможном (при заданном шаге регистрации интерферограммы) спектральном диапазоне. Этот диапазон без переналожения простирается от 0 до $1/2h$ (частоты Найквиста), где h — шаг дискретизации интерферограммы. Такая ситуация может возникнуть и при работе с многоканальным (многозондовым) фурье-спектрометром [1], позволяющим одновременно регистрировать спектры от нескольких зондов, работающих в разных спектральных областях. Но измерения во всем спектральном диапазоне сопровождаются проблемой, которую демонстрирует спектр на рис. 1, записанный на фурье-спектрометре АФ-1 [2].

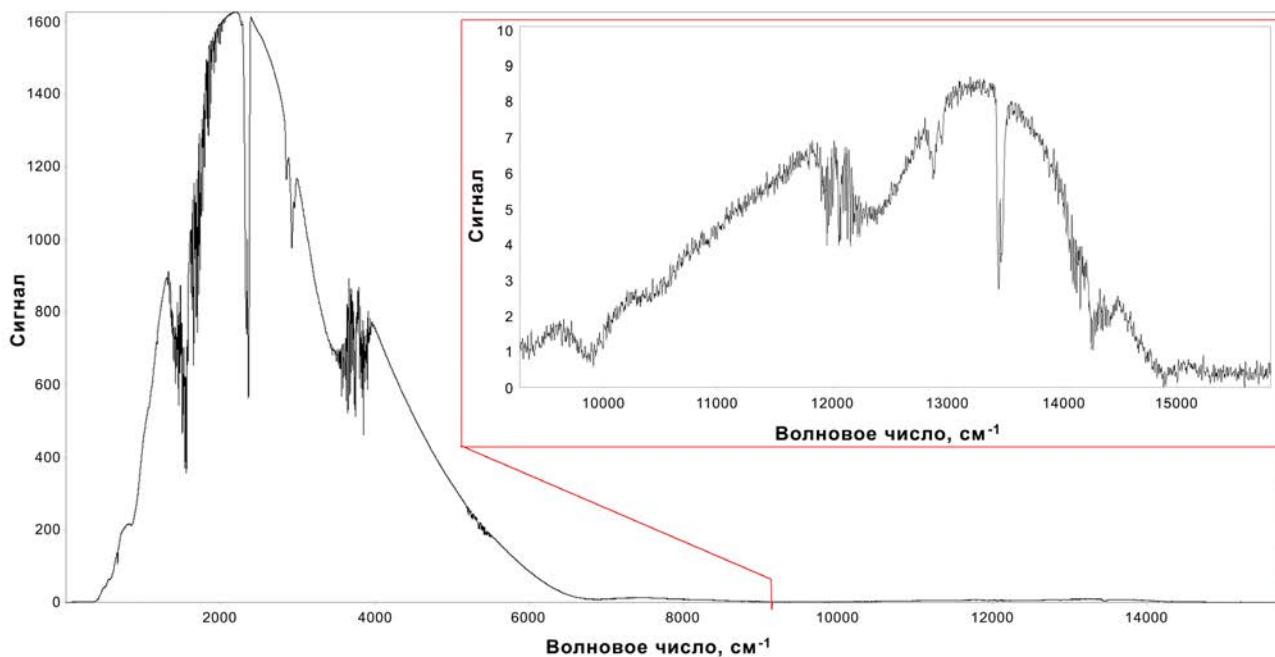


Рис. 1. Спектр пропускания Фурье-спектрометра АФ-1.

Шаг дискретизации на этом приборе равен $\lambda/2$, где λ — длина волны излучения He-Ne лазера. Соответственно рабочий спектральный диапазон простирается от 0 до 15800 см^{-1} . Рассматривая вышеуказанный спектр, видим в его правой части наличие «духа» от левой части. На рисунке приведен увеличенный фрагмент этого духа. По амплитуде он менее 1% от основного спектра. При высокоточных измерениях во всем спектральном интервале этот эффект может привести к серьезным ошибкам.

Рассмотрим природу этого явления и требования к прибору для его минимизации. В фурье-спектрометре измеряемая интерферограмма $I(\delta)$ описывается уравнением

$$I(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma,$$

где $B(\sigma)$ — спектральная яркость излучения, регистрируемого спектрометром, δ — оптическая разность хода в плечах интерферометра, σ — волновое число. В реальных приборах полученная интерферограмма представляет собой конечное число дискретных значений, регистрируемых через равные интервалы h оптической разности хода. Соответственно $\delta(n) = nh$, а $I[\delta(n)] = I(nh)$, что позволяет при восстановлении спектра применять алгоритмы быстрого Фурье-преобразования.

Но при спектральных измерениях возникают погрешности в определении оптической разности хода. Идеальные выборки интерферограммы должны проводиться через равные интервалы h . Реальная интерферограмма $I[\delta(n)]$ регистрируется в точках $\delta(n) = nh + \Delta(n)$, где $\delta(n)$ — действительная оптическая разность хода в n -й выборке. В погрешности $\Delta(n)$ присутствуют: фазовый сдвиг (например, из-за ошибки в определении нулевой разности хода интерферограммы); случайные флуктуации в измерении δ ; систематические повторяющиеся от скана к скану погрешности.

Фазовый сдвиг исправляется фазовой коррекцией [3].

Случайные флуктуации приводят к тому, что в получаемом спектре каждая линия сопровождается симметричными флуктуациями с шириной их распространения от спектральной линии обратно пропорциональной радиусу корреляции соответствующих погрешностей $\Delta(n)$. Поскольку погрешности имеют случайный характер, при суммировании интерферограмм или спектров отношение сигнал/шум в получаемом спектре улучшается пропорционально квадратному корню из числа сканов, если шум обусловлен такими погрешностями.

При систематических погрешностях восстанавливаемый спектр для каждой линии состоит из основной линии и ряда боковых гармоник. При этом расстояние между гармониками может быть меньшим, чем ширина отдельной гармоники. В результате они сливаются, давая аппаратную функцию сложной формы. Суммирование интерферограмм при наличии систематических погрешностей не улучшает спектр.

Исследуем одну из существенных систематических ошибок, возникающих при рассматриваемой ниже системе регистрации интерферограмм, реализованной в спектрометре АФ-1 [2] и в ряде других фурье-спектрометрах. Оценим требования к характеру и величинам такой погрешности.

Для измерения оптической разности хода в основном канале фурье-спектрометра, где регистрируется интерферограмма исследуемого излучения, используется референтный канал. Основным его элементом является источник монохроматического излучения (лазер), которое заводится на тот же интерферометр и регистрируется на его выходе своим приемником излучения. Референтная интерферограмма $I_r(\delta)$ имеет вид

$$I_r(\delta) = \cos(2\pi\sigma\delta).$$

Эта интерферограмма используется для создания управляющих сигналов, подающихся на АЦП, оцифровывающий интерферограмму основного канала. Электронная система, измеряющая референтную интерферограмму, должна вырабатывать управляющие сигналы при прохождении референтного сигнала через нулевое значение. Соответственно управляющие сигналы вырабатываются с шагом $h = \lambda/2$, где λ — длина волны лазерного излучения ($\sigma = 1/\lambda$). Реальная электроника вырабатывает управляющий сигнал с некоторой систематической ошибкой (рис. 2), зависящей от того, в каком направлении меняется сигнал (растет он по величине или падает). Соответственно регистрация происходит в точках

$$\delta = 2nh + \Delta x_1 \text{ и } \delta = (2n + 1)h + \Delta x_2,$$

где n — номер очередного периода референтной интерферограммы.

Таким образом, если $\delta' = \delta + \Delta(\delta)$, δ — измеряемое, а δ' — истинное значение оптической разности хода, то

$$\Delta(\delta) = \varepsilon \cos(2\pi\sigma/T - \varphi),$$

где T — период функции $\Delta(\delta)$, ε — амплитуда погрешности смещения, φ — фазовый сдвиг.

Покажем, как такая погрешность влияет на аппаратную функцию прибора. Для этого рассмотрим интерферограмму монохроматического источника излучения с яркостью B и волновым числом σ_0 .

$$I(\delta) = B \cos[2\pi\sigma_0[\delta + \varepsilon \sin(2\pi\delta/T)]] = B \cos[\Omega_0\delta + \beta \sin(\omega\delta)],$$

где $\Omega_0 = 2\pi\sigma_0$, $\beta = 2\pi\sigma_0\varepsilon$, $\omega = 2\pi/T$.

Это выражение можно разложить в ряд по функциям Бесселя J_n

$$I(\delta) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[(\Omega_0 + n\omega)\delta].$$

Но при таком представлении видно, что в регистрируемой интерферограмме, кроме основной линии (на частоте σ_0), появляются ряд боковых гармоник (на частотах $\sigma_n = \sigma_0 + n/T$).

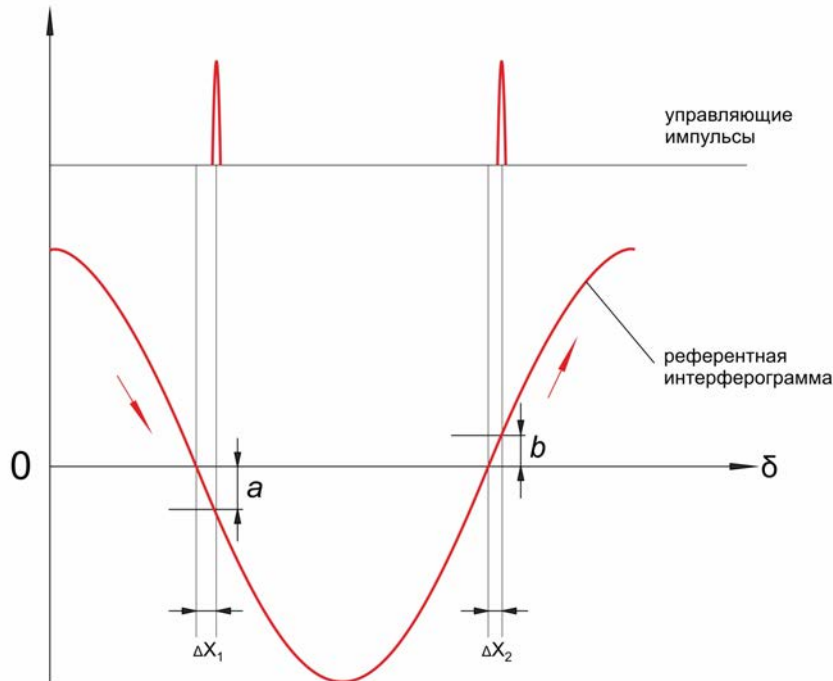


Рис. 2. Схема формирования управляющих импульсов для АЦП в референтном канале.

В рассматриваемом нами случае $T = 2h$. Соответственно, получаем в силу переналожения в нашем спектральном интервале две частоты одна на частоте σ_0 , вторая на частоте $1/(2h) - \sigma_0$. Этот результат и объясняет природу исследуемого явления.

Когда прибор проводит измерения лишь в половине спектрального интервала (определяемого шагом дискретизации), требования к эквидистантности резко снижаются. Это обычный случай для фурье-спектрометров, работающих в среднем ИК диапазоне. Референтный канал у таких приборов выполнен, как правило, на основе He-Ne лазера, а рабочий спектральный интервал простирается от 400 до 7900 см^{-1} . В этом случае наличие духов в диапазоне от 7900 до 15800 см^{-1} не критично.

Поскольку, как было показано, периодические отклонения от эквидистантности проявляются в появлении духов, то по величине последних можно оценивать величину этих отклонений и использовать при настройке «нулевого» уровня в электронной системе (рис. 2).

Рассмотрим электронную систему, ее построение и функционирование, обеспечивающую регистрацию интерферограммы с некоторым шагом и минимизирующую ошибку $\Delta(\delta)$.

Для точной привязки интерферограммы к ОРХ в интерферометре требуется эквидистантность по ОРХ импульсов запуска АЦП (меток). Для получения таких меток синусоидальный сигнал референтного канала преобразуется в меандр. Далее меандр дифференцируется и метки формируются по фронтам меандра. Компаратор не является идеальным формирователем, что обусловлено конечным значением его усиления. Если используемый нами компаратор имеет усиление 80 дБ (10 000), то при нулевом значении порогового напряжения входные сигналы выше 0.5 мВ будут соответствовать значению 5В на выходе, если ниже 0.5 мВ, то выходное состояние компаратора не определено. Это явление называется джиттер (дребезг). Компаратор срабатывает по шумам входного сигнала. Дребезг приводит к хаотичному положению метки. Дребезга, связанного с шумами, можно избежать, используя положительную обратную связь (ПОС), которая превращает компаратор в триггер Шмитта. Триггер Шмитта характеризуется зоной нечувствительности (гисте-

резисом) к входному сигналу. Внутри этой зоны значение выхода компаратора не меняется. У триггера Шмитта, если его питание однополярное, есть свой недостаток — асимметрия положения петли гистерезиса по отношению к порогу (в нашем случае 0 Вольт). Этот недостаток можно компенсировать смещением входного сигнала в сторону отрицательных значений на величину, чуть меньшую половины ширины петли гистерезиса. Или использовать два компаратора: один для верхней полувольты входного сигнала, другой для нижней. Эффективность подавления дребезга положения меток контролируется подпрограммой для управления Фурье-спектрометром. Она оценивает отношение сигнал/шум в спектре и методом последовательного приближения подстраивает ширину петли гистерезиса с помощью цифрового потенциометра (RDAC), включённого последовательно в цепь ПОС компаратора. Управление RDAC осуществляется тем же микроконтроллером, что и для регистрации интерферограммы.

Упрощённая схема формирования «меток» запуска АЦП приведена на рис. 3. На вход схемы поступает сигнал усилителя диода референтного канала (Input signal). Для уменьшения влияния шумов схема формирует «метки» по точкам перехода сигнала через 0, где крутизна сигнала максимальная. Схема состоит из двух каналов. Верхний (по схеме) содержит повторитель (A1). Каждый из каналов содержит компаратор (A2A, A2B) и одновибратор (A3A, A3B). Компараторы работают, как уже отмечалось, с порогом 0 вольт. Положительная обратная связь резисторами R_f и R_i позволяет вырезать шумы входного сигнала в зоне гистерезиса и, таким образом, избежать эффекта «дребезга контактов» из-за многократного перехода компаратора из состояния «логический ноль» в состояние «логическая единица» за счёт шума. Срабатывание компаратора (переход из 1 в 0) отстаёт по времени от точки перехода сигнала через 0, так как в этот момент (для положительной полувольты последнего) потенциал на его входе «+» слегка опускается ниже нуля за счёт ПОС на величину, определяемую по формуле

$$\Delta U_h = R_i U_{0h} / (R_i + R_f),$$

где ΔU_h — величина изменения потенциала на входе «+» и U_{0h} — уровень логической единицы в вольтах (примерно 2–4 Вольта). Для значений резисторов ПОС, приведенных в схеме, величина «подскока» U_h равна примерно 10 мВ. Для отрицательной полувольты сигнала потенциал на входе «+» компаратора подскакивает на существенно меньшее значение, определяемое формулой

$$\Delta U_l = R_i U_{0l} / (R_i + R_f),$$

где U_{0l} — уровень логического нуля компаратора (0.3–0.9 В).

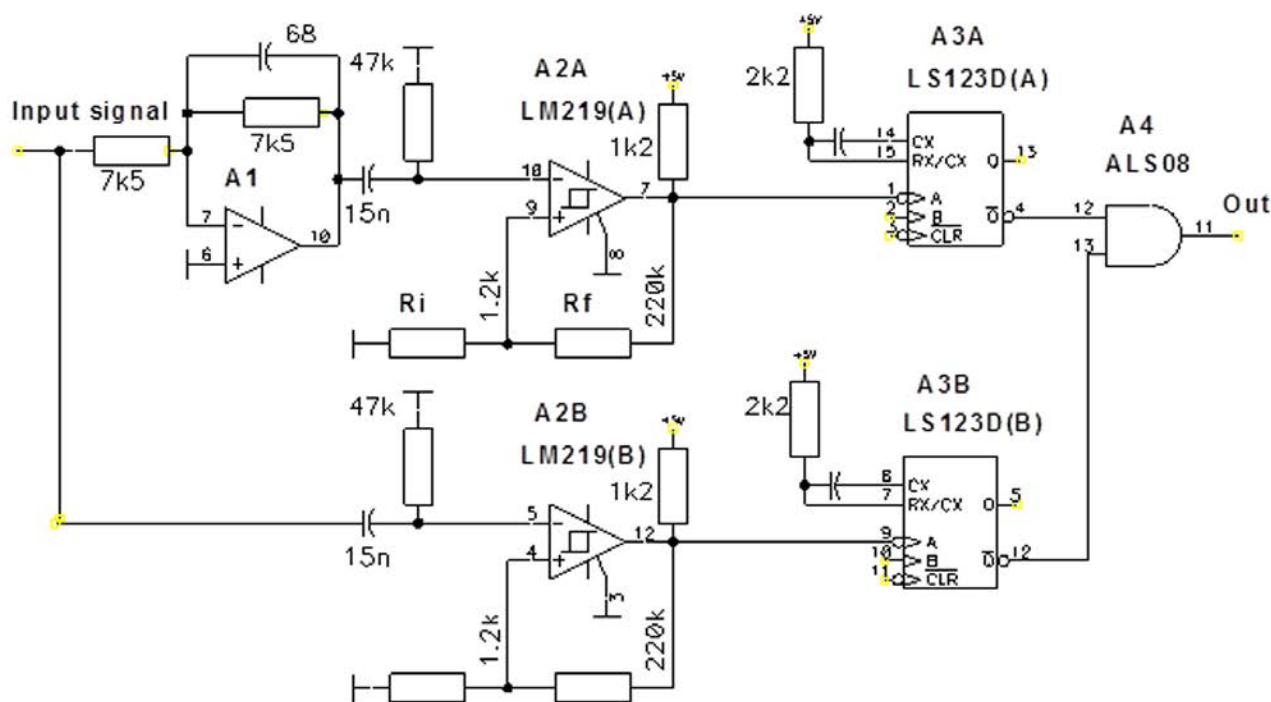


Рис. 3. Упрощённая схема формирователя импульсов запуска АЦП.

Асимметрия гистерезиса приводит к неравенству полупериодов сигнала на выходе компаратора. Эту ошибку можно исключить, подавая на второй компаратор сигнал, инверсный по отношению к сигналу первого, и формируя «метку» запуска АЦП с помощью одновибраторов, срабатывающих по переходу компа-

раторов из единицы в нуль (или наоборот). Существенно, что оба компаратора находятся в одном корпусе микросхемы (LM219), что минимизирует погрешности, связанные с токами смещения, температурой и пр. «Метки», сформированные одновибраторами, объединяются микросхемой с функцией ИЛИ (A4).

Предварительная настройка формирователя осуществляется с помощью генератора (ГЗ-118), осциллографа (GDS-840C), оптического прерывателя и тестовой программы управления шириной петли гистерезиса. Программа управления записана в микроконтроллер (ATmega32) модуля предварительной обработки, осуществляющего регистрацию интерферограммы. Формирователь меток входит в состав модуля управления сканированием подвижного отражателя. На первом шаге контролируется АРУ референтного канала на частоте генератора 6.6 кГц при изменении амплитуды сигнала последнего от 5 до 50 мВ. На втором шаге вместо генератора к входу модуля управления сканированием подключается диод (ФД-10ГА). Включается оптический прерыватель и регулировкой усиления референтного канала устанавливаются размах шума последнего 2 мВ. Осциллограф подключается к выходу формирователя меток. В этих условиях дребезга не наблюдается. Уменьшая усиление референтного канала, снижают его шум до 1 мВ и убеждаются в отсутствии дребезга. Далее необходимо установить шум равным 4 мВ, подключить модуль управления сканированием через USB — кабель к PC и через соответствующий трёхпроводной кабель к формирователю меток для управления RDAC (по интерфейсу SPI). В рабочем окне программы управления гистерезисом растянуть петлю так, чтобы дребезг не наблюдался. Окончательно ширина петли оптимизируется в работающем спектрометре при мониторинге спектра пропускания (атмосферы) на длине волны CO₂ автоматически при подключении соответствующей опции в настроечном файле (*.ini.clb) перед запуском программы.

Рассмотренная электронная система обеспечивает эквидистантность точек регистрации интерферограммы с погрешностью в пределах 1%, что вполне достаточно для работы прибора в среднем ИК диапазоне (с референтным лазерным излучением с длиной волны $\lambda = 0.6328$ мкм) от 0 до 7900 см⁻¹.

Список литературы

1. Балашов А.А., Вагин В.А., Голяк И.С., Морозов А.Н., Хорохорин А.И., Многоканальный динамический ИК Фурье-спектрометр // Журнал прикладной спектроскопии. 2017. Т. 84. №4. С. 643-647
2. Балашов А.А., Вагин В.А., Висковатых А.В., Жижин Г.Н., Пустовойт В.И., Хорохорин А.И., Аналитический Фурье-спектрометр АФ-1 широкого применения // ПТЭ. 2003. №2. С. 87-89
3. Вагин В.А., Гершун М.А., Жижин Г.Н., Тарасов К.И., Светосильные спектральные приборы // Книга под ред. К.И.Тарасова. М.: Наука, 1988.
4. Вагин В. А., Даниелян Г. Л. Многозондовая фурье-спектроскопия // Физические основы приборостроения. 2016. Т. 5. № 4(21). С. 96-103.
5. Балашов А.А., Вагин В.А., Голяк И.С., Морозов А.Н., Нестерук И.Н., Хорохорин А.И. Раман-спектрометр на основе динамического фурьеспектрометра видимого и ближнего ИК диапазона // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6. № 3(25). С. 83-89. DOI: 10.25210/jfor-1703-083089
6. Вагин В. А., Хорохорин А. И. Система управления, регистрации и обработки спектральной информации многозондового ИК фурье-спектрометра // Физические основы приборостроения. 2018. Т. 7. № 3(29). С. 8-15. DOI: 10.25210/jfor-1803-008015

Поступила 21 октября 2019 г.

THE EQUIDISTANCE OF THE REGISTRATION POINTS OF THE INTERFEROGRAM IN A FOURIER SPECTROMETER

V.A. VAGUINE, A.I. KHOROKHORIN

doi: 10.25210/jfop-1903-0970102

The effect of non-equidistance of the registration points of the interferogram in a Fourier spectrometer having a periodic character on the reconstructed spectrum is described in this article. The mechanism of formation of control pulses in the reference (laser) channel for ADC is considered. It is shown that since they are produced when the reference signal passes through zero, depending on the direction of its change there is a different delay, which leads to the aforementioned periodic non-equidistance points recording an interferogram. In the case before us the registration error period is equal to twice the interferogram sampling step. Accordingly, we obtain two frequencies in our spectral range due to the overvoltage: one of which is σ_0 and the other - $1/(2h) - \sigma_0$, where h is the sampling step. This result explains the nature of the phenomenon under study.

A simplified electronic scheme for the formation of labels of start of ADC minimizing such errors is considered. The reference channel signal is input to the circuit. To reduce the effect of noise the scheme generates labels on the signal transition points through 0 where is the maximum signal steepness. To avoid a chaotic state of a label associated with the noise positive feedback is used which turns the comparator into a Schmitt trigger. The Schmitt trigger is characterized by a dead zone (hysteresis) to the input signal. The hysteresis loop is offset to the right with respect to the signal zero and this leads to the inequality of the half-cycles of the square wave at the comparator output and, accordingly, to non-equidistance of labels if labels are formed by one channel. In the scheme under consideration the input signals of the channels are antiphase. This allows you to create labels for each channel when changing the signal sign in the same direction what provides equidistance.

The label Builder is part of the mobile reflector scanning control module. The hysteresis loop width is optimized in the spectrometer when monitoring the transmission spectrum at the CO_2 wavelength automatically when the corresponding option is enabled in the setup file (*ini.clb) before starting the program.

Уважаемые читатели!

Подписка на журнал оформляется через подписное агентство «Книга-Сервис» и объединенный каталог «Пресса России» (подписной индекс **29196**)

Журнал включен:

- В *Российский индекс научного цитирования (РИНЦ)*.
- В базу данных *Russian Science Citation Index (RSCI)* на платформе *Web of Science*.
- В *Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук*.

РУБРИКИ ЖУРНАЛА

- Обзоры**
Reviews
- Математическое моделирование физических процессов**
Mathematical Modeling of Physical Processes
- Приборы и методы быстропротекающих физических процессов**
Devices and Methods of Fast-Proceeding Physical Processes
- Приборы и методы оценки погрешности физических величин**
Devices and Methods of an Assessment of an Error of Physical Values
- Приборы и методы физики и техники СВЧ диапазона**
Microwave Range Devices and Methods of Physics and Techniques
- Приборы и методы измерений в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах**
Devices and Methods of Measurements in Millimeter and Submillimeter Ranges
- Лазерная физика и техника**
Laser Physics and Technique
- Приборы и методы дистанционного зондирования**
Devices and Methods of Remote Sensing
- Радиолокационные средства и системы**
Radars and Systems
- Физические основы приборов и устройств метрологии**
Physical Bases of Metrology Instruments and Devices
- Проблемы оптического приборостроения на основе метаматериалов**
Problems of Optical Instrumentation on the Basis of Metamaterials
- Проблемы обработки сигналов и изображений в акустооптике и радиофизике**
Problems of Signal and Image Processing in Acousto-Optics and Radiophysics
- Проблемы атомной науки и техники**
Problems of Atomic Science and Technology
- Информационно-измерительные системы**
Information-Measuring System
- Методы радиолокационных и радиометрических измерений**
Methods of Radar and Radiometric Measurements
- Физические основы космического приборостроения**
Physical Bases of Space Instrumentation
- Физические основы приборостроения для биологии и медицины**
Physical Bases of Instrumentation for Biology and Medicine
- Методы высокоточных измерений и воспроизведения физических величин**
Methods of High-Precision Measurements and Reproduction of Physical Values
- Приборы и методы экспериментальной физики**
The devices and methods of experimental physics
- Физические основы приборов и устройств**
Physical Bases of Instruments and Devices
- Приборы и устройства**
Instruments and Devices
- Оптические материалы и технологии**
Optical Materials and Technologies
- Спектральные методы и устройства**
Spectral Methods and Devices
- Акустооптические и оптоакустические методы и устройства**
Acousto-optic and Opto-Acoustic Methods and Devices
- Физика плазмы в приборостроении**
Plasma Physics in Instrumentation
- Физика и техника плазмы**
Physics and Technique of Plasma
- Новые математические и физические методы**
New Mathematical and Physical Methods
- R-функции, атомарные функции, вейвлеты, фракталы и хаос в физике и технике**
R-functions, Atomic Functions, Wavelets, Fractals, and Chaos in Physics and Engineering
- Электродинамика искусственных сред и структур**
Electrodynamics of Artificial Materials and Structures
- Электродинамика низко и высокотемпературных сверхпроводящих структур**
Electrodynamics of Low- and High-Temperature Superconducting Structures
- Новости науки**
Science News
- Краткие сообщения**
Brief Communications
- Памятные даты**
Memorable Dates
- Наши юбиляры**
Our Hero of the Day
- В помощь экспериментатору**
To Help the Experimenter
- Информация**
Information

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ, НАПРАВЛЯЕМЫХ В РЕДАКЦИЮ ЖУРНАЛА «ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

1. К публикации принимаются оригинальные работы, не предназначенные для публикации в других изданиях.
2. Необходимы следующие материалы:
 - сопроводительное письмо,
 - акт экспертизы,
 - соответствующий индекс универсальной десятичной классификации (УДК) литературы,
 - название на русском и английском языках,
 - фамилии и инициалы авторов на русском и английском языках (фамилии следуют в алфавитном порядке),
 - аннотацию на русском и английском языках,
 - ключевые слова на русском и английском языках,
 - краткое содержание статьи (реферат) на русском и английском языках объёмом 1–2 с,
 - текст статьи вместе с рисунками и таблицами,
 - список литературы в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008,
 - краткие сведения об авторах, включающие контактный телефон, фамилию, имя, отчество (полностью), ученую степень (звание), место работы, служебные и домашние адреса авторов с обязательным указанием почтового индекса и номеров телефонов, адрес электронной почты (на отдельной странице на русском и английском языках).
3. Статья представляется в виде файлов формата **MS Word 97-2003 (*.doc)** и одного экземпляра распечатки с полуроторным межстрочным интервалом. Файлы могут быть записаны на оптический (CD, DVD) носитель, а также высланы по электронной почте редакции. Статья должна иметь сквозную нумерацию.
4. При наборе текста используются стандартный True Type шрифт — Times New Roman. Устанавливаемый размер бумаги — А4 (210×297 мм).
5. Формульные выражения, а также отдельные символы выполняются исключительно в редакторе формул **MathType**.
6. Иллюстрации выполняются в виде **графических файлов** (цветных/черно-белых) в **растровом** (*.tiff с сжатием без потери качества (LZW) или *.png) или **векторном** формате. Разрешение изображений должно быть не хуже **300 dpi** и шириной не менее 8 см (абсолютные размеры изображения **не менее 1000×1000 точек**). Все иллюстрации сопровождаются подрисовочными подписями (не повторяющими фразы-ссылки на рисунки в тексте), включающими в себя номер, название и при необходимости условные обозначения. Рисунки должны соответствовать следующим требованиям:
 - буквенные и цифровые обозначения на рисунках по **начертанию** и **размеру** должны соответствовать обозначениям в тексте статьи,
 - текстовая информация и условные обозначения выносятся из рисунка в текст статьи или подрисовочные подписи,
 - для оформления рисунков **не допускается применять средства рисования Word**, а также таблицы. Режим обтекания только «в тексте» с выравниванием по центру.Иллюстрации должны быть включены в текст, а также представлены отдельными графическими файлами.
7. Термины, определения и единицы физических величин должны соответствовать действующим ГОСТ.
8. В формулах латинские буквы следует набирать курсивом, а цифры, греческие строчные и прописные символы прямо. Векторы и матрицы следует набирать прямыми жирным шрифтом; «exp(.)» в значении экспоненты набирать прямым светлым шрифтом. В индексах сокращения от русских и английских слов следует набирать прямым шрифтом.
9. Формулы нумеруются в круглых скобках (например, (2)), литературные ссылки в прямых — [2], подстрочные замечания оформляются сноской.
10. На последней странице рукописи должны быть подписи всех авторов.
11. Редакция не ставит в известность авторов об изменениях и сокращениях рукописи, имеющих редакционный характер и не затрагивающих принципиальных вопросов.
12. Рукописи, в которых не соблюдены данные требования, возвращаются авторам без рассмотрения.
13. Редакция оставляет за собой право использовать наиболее интересные статьи в периодических тематических сборниках библиотек журнала. Предоставление редакции рукописи является подтверждением согласия автора на указанное выше использование его произведения.
14. Авторы статей несут ответственность за полноту и достоверность цитируемой в них литературы, а также за публикацию заимствованного материала без ссылки на источник.
15. За достоверность сведений, изложенных в публикациях, редакция и издатель ответственности не несут.
16. За публикацию материалов, содержащих закрытые сведения, авторы несут персональную ответственность на основании действующих законодательных актов.
17. Итоговое решение об одобрении или отклонении представленного в редакцию материала принимается редакционной коллегией и является окончательным.





Российская Академия Наук

**Поздравляем д.ф.-м.н., проф. Андрея Николаевича Морозова
с избранием членом-корреспондентом
Российской академии наук!**

15 ноября 2019 года Андрей Николаевич Морозов избран членом-корреспондентом Российской академии наук в секции «Вычислительные, локационные, телекоммуникационные системы и элементная база» Отделения нанотехнологий и информационных технологий.

Морозов Андрей Николаевич родился 17 июня 1959 года. В 1982 году с отличием окончил факультет «Машиностроение» Московского высшего технического училища им. Н.Э. Баумана, доктор физико-математических наук, профессор, генеральный директор Центра прикладной физики МГТУ им. Н.Э. Баумана, почетный работник высшего образования РФ. С 1998 года – заведующий кафедрой физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Лауреат премий имени А. Чижевского (2004 г.), Первой премии МГТУ им. Н.Э. Баумана (2005 и 2014 гг.). Награжден медалью «В память 850-летия Москвы» и Крестом за заслуги Европейской академии естественных наук, Медалью имени Королева, Почетным знаком имени Циолковского, Почетным знаком «За заслуги перед Университетом».

**Редколлегия журнала поздравляет Андрея Николаевича
и желает ему удачи, научных достижений
и больших творческих успехов!**



ИНФОРМАЦИЯ

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ, В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ТЕХНОСФЕРА» ВЫШЛИ МОНОГРАФИИ

Кравченко В.Ф., Чуриков Д.В. *Цифровая обработка сигналов атомарными функциями и вейвлетами. М.: Техносфера, 2019 (Дополнительный тираж). 182с.*

ISBN 978-5-94836-506-0

*Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора физико-математических наук, профессора В.Ф. Кравченко*

Аннотация

Монография посвящена исследованию, развитию и разработке методов анализа физических систем на основе теорий атомарных, R- и WA- систем функций, построению алгоритмов обработки и моделирования процессов дистанционного зондирования и радиоастрономии с целью улучшения физических характеристик передачи, восстановления и распознавания многомерных сигналов. Рассматриваются новые весовые функции (окна) и фильтры с конечной импульсной характеристикой на их основе, а также ортогональные и аналитические вейвлеты. Исследована обобщенная теорема отсчетов на основе атомарных функций и её частные случаи. Разработан алгоритм синтеза многомерных функций с произвольной геометрией опорной области. Предложено и обосновано обобщение функции неопределенности по времени и частоте применительно к анализу сложных зондирующих сигналов.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, работающих в области цифровой обработки сигналов применительно к современным задачам радиофизики и радиотехники.

Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. *Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники. М.: Техносфера, 2018. 696с.*

ISBN 978-5-94836-518-3

*Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора физико-математических наук, профессора В.Ф. Кравченко*

Аннотация

В монографии изложены конструктивные методы алгебры логики, теория R-функций (функций В.Л. Рвачева), атомарных функций (АФ), вейвлетов, WA-систем функций и фракталов применительно к задачам современной физики и техники. Теория R-функций, содержащая в себе идеи булевой алгебры и аналитической геометрии, представляет собой универсальный математический аппарат, позволяющий в неявном виде получать уравнения границ областей произвольной геометрии. На основе этих уравнений осуществляется построение структур решения краевых задач в областях сложной формы, т.е. таких аналитических выражений, которые априори удовлетворяют заданным краевым условиям. Структуры решения зависят от неопределенных компонент, находящихся из условия минимизации функционала Ритца или одним из проекционных методов.

В главах 1–4 и приложениях описаны алгоритмы и приведены многочисленные примеры решения различных типов внешних и внутренних краевых задач электростатики и электродинамики в областях сложной формы. В главе 5 рассмотрено построение новых ортогональных вейвлетов Кравченко на основе атомарных функций. Глава 6 посвящена построению новых конструкций ортогональных вейвлетов на основе АФ $h(x)$. Обосновано обобщение функции неопределенности (ФН) по времени и частоте на основе семейства АФ применительно к цифровой обработке сигналов в антенных системах. Исследован новый класс аналитических вейвлетов Кравченко–Рвачева (АКР-вейвлетов). В главе 7 предложен и обоснован новый метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа на основе R-функций и вейвлетов применительно к волноводам сложного поперечного сечения. В главе 8 и приложении к ней построен и обоснован новый класс фрактальных функций с учетом специфических свойств атомарных функций. Впервые получены новые синтезированные атомарно-фрактальные функции в комбинациях с классическими фрактальными функциями. Проведен численный эксперимент для одномерных, двумерных и кольцевых фрактальных антенных решеток.

Монография представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов радиофизических и радиотехнических специальностей, а также специалистов, работающих в области вычислительной математики и физики. Рукопись монографии Кравченко В.Ф., Кравченко О.В. «Конструктивные методы алгебры логики, атомарных функций, вейвлетов, фракталов в задачах физики и техники» была рассмотрена на заседании Ученого совета Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН 25 декабря 2015 года (выписка из протокола № 7) и рекомендована к опубликованию. При оформлении обложки использована иллюстрация знаменитой шахматной партии (Р. Фишер — М. Тайманов, Ванкувер, 1971), комментарий см. на стр. 695.

мир цифровой обработки

В.Ф. КРАВЧЕНКО,
Д.В. ЧУРИКОВ

Цифровая обработка
сигналов атомарными
функциями и вейвлетами



КРАВЧЕНКО ВИКТОР ФИЛИППОВИЧ –
заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н.,
профессор, институт радиотехники и
электроники им. В. А. Котельникова РАН,
научно-технологический центр
уникального приборостроения РАН,
московский государственный
технический университет им. Н.Э. БАУМАНА

ЧУРИКОВ ДМИТРИЙ ВИКТОРОВИЧ –
к.ф.-м.н., институт радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
научно-технологический центр
уникального приборостроения РАН,
московский физико-технический
институт (государственный университет)
российский новый университет

- ИССЛЕДОВАНИЕ, РАЗВИТИЕ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕОРИЙ АТОМАРНЫХ, R- И WA-СИСТЕМ ФУНКЦИЙ
- ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДИСТАНЦИОННОГО ЭХОИДИРОВАНИЯ И РАДИОАСТРОНОМИИ В ЦЕЛЯХ УЛУЧШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕДАЧИ
- ВОССТАНОВЛЕНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ



ТЕХНОСФЕРА



Цифровая обработка
сигналов атомарными
функциями и вейвлетами

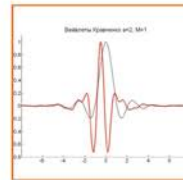
цифровой обработки

XI
♦
15

цифровой обработки

В.Ф. КРАВЧЕНКО,
Д.В. ЧУРИКОВ

Цифровая обработка
сигналов атомарными
функциями и вейвлетами



ТЕХНОСФЕРА



Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина



Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана



Институт радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН

В.Ф. Кравченко
О.В. Кравченко

В.Ф. Кравченко, О.В. Кравченко

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ, АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ, ВЕЙВЛЕТОВ, ФРАКТАЛОВ В ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ
ЛОГИКИ, АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ,
ВЕЙВЛЕТОВ, ФРАКТАЛОВ В ЗАДАЧАХ
ФИЗИКИ И ТЕХНИКИ



ТЕХНОСФЕРА



ISSN 2225-4293



9 772225 429003 >



<http://jfop.ru>

<http://dx.doi.org/10.25210/jfop-1903>